ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Un approccio interdisciplinare alla parabola per riflettere sulla nascita della fisica moderna: risultati da uno studio con studenti di classe terza di Liceo Scientifico

Relatore:
Prof.ssa Olivia Levrini

Correlatore:
Dott.ssa Sara Satanassi

Presentata da:
Nicolò Quadrelli

Anno Accademico 2019/2020

Abstract

Questo elaborato di tesi si inserisce nel progetto Europeo Erasmus + IDENTITIES, il quale si pone l'obiettivo di produrre moduli di insegnamento interdisciplinari in ambito STEM per la formazione iniziale degli insegnanti. Nello specifico, la tesi è incentrata sull'analisi di un modulo interdisciplinare sul tema della parabola, costruito per mostrare l'intreccio profondo tra matematica e fisica nell'evoluzione storica delle due discipline. Il modulo è stato costruito e sperimentato per la prima volta in un corso PLS per docenti in servizio, a cui ho partecipato come osservatore. Sulla base dell'osservazione, ho progettato e analizzato un'esperienza di classe per rispondere a questa domanda: come reagisce una classe III di Liceo all'approccio storico-epistemologico all'interdisciplinarità tra matematica e fisica che si sta iniziando a sviluppare nel progetto IDENTITIES?

Per rispondere a questa domanda riporto, nel capitolo 1, la trattazione del tema così come è stata sviluppata nel corso PLS. Proseguo, nel capitolo 2, riportando la descrizione delle lezioni sulla parabola tenute dal docente di classe e l'intervento esterno di carattere interdisciplinare proposta agli studenti a fine percorso. Concludo con il capitolo 3 nel quale presento l'indagine condotta per rispondere alla domanda e, quindi, per valutare le reazioni degli studenti all'interdisciplinarità. Come conclusione è possibile affermare che gli studenti risultano interessati ad un approccio storico epistemologico e che riflettere sull'interdisciplinarità permette di far emergere l'autenticità e l'identità delle discipline.

Introduzione

Questo elaborato di tesi si inserisce all'interno del progetto Europeo Ersasmus + IDENTITIES[1], il quale si pone l'obiettivo di elaborare un modello di insegnamento interdisciplinare in ambito STEM, che risponda alle esigenze del presente in continua e rapida evoluzione.

In un mondo in cui si dibatte sempre di più dei problemi derivanti da una iper-specializzazione della formazione, il progetto IDENTITIES si pone la domanda di quale approccio interdisciplinare dell'insegnamento della matematica, fisica e informatica possa guidare studenti e insegnanti a sviluppare competenze di comprensione della realtà sempre più complessa.

Sulle basi di questo progetto è stato tenuto il corso PLS[2] per docenti in servizio dal titolo: "Strumenti di analisi e comprensione del testo scientifico per l'interdisciplinarità: un confronto tra fonti e manuali su temi di fisica e matematica" rivolto soprattutto a insegnati di matematica e fisica delle scuole superiori, ma aperto anche al contributo di docenti di lettere e filosofia. Il corso ha avuto come oggetto il riflettere sull'interdisciplinarità a partire dal caso della parabola: essa è stata analizzata come possibile anello di congiunzione principalmente tra matematica e fisica, ma anche come sorgente di possibili collegamenti con discipline umanistiche quali storia, linguistica e filosofia.

Questa tesi è frutto di un percorso iniziato seguendo in prima persona il corso PLS e proseguito in una classe terza del professor V. Fiumana, docente di matematica e fisica del Liceo scientifico Paulucci di Calboli di Forlì, avendo avuto la possibilità di osservare direttamente le lezioni in cui trattava il tema della parabola. L'obiettivo principale dell'affiancamento in classe è stato verificare l'attuabilità, e in tal caso l'efficacia, di un insegnamento interdisciplinare sull'argomento-parabola, mediante l'utilizzo di varie prospettive e approcci alternativi a quelli tradizionalmente impiegati.

La tesi si sviluppa in tre capitoli, nei quali descrivo l'indagine svolta: nel primo capitolo presenterò i concetti di disciplina e interdisciplinarità partendo dalla loro etimologia, prendendo

---

[1]Obiettivo principale di IDENTITIES è la progettazione di nuovi approcci didattici sull'interdisciplinarità nella scienza e nella matematica per innovare la formazione iniziale degli insegnanti. L'interdisciplinarità è esplorata attraverso la messa in evidenza delle strutture linguistiche e epistemologiche che caratterizzano le identità disciplinari, i loro intrecci e le loro integrazioni.

[2]Strumenti di analisi e comprensione del testo scientifico per l'interdisciplinarità: un confronto tra fonti e manuali se temi di fisica e matematica. Corso PLS, 2019-2020, in collaborazione col POT, Studi Umanistici Oltre le due culture: per un dialogo interdisciplinare fra logica, filosofia e scienze della comunicazione

in esame l’interdisciplinarità tra matematica e fisica messa fuoco dalla parabola come argomento; mostrerò le possibili modalità di approccio al tema, facendo riferimento alle considerazioni di relatori e professori emerse durante il corso del PLS; infine propongo la domanda di ricerca che guiderà l’indagine: come reagisce una classe di Liceo all’approccio storico-epistemologico all’interdisciplinarità tra matematica e fisica che si sta sviluppando a Bologna nell’ambito del progetto IDENTITIES? Nel secondo capitolo illustrerò l’analisi del contesto in cui viene effettuata l’indagine, che comprende l’intervista al professor V. Fiumana, in cui chiedo quale sia la sua posizione circa la possibilità di un insegnamento di carattere interdisciplinare, e comprende considerazioni di carattere generale sulla classe in esame; passerò poi a presentare le modalità delle lezioni tenute dal Professore e la descrizione della lezione conclusiva da parte della professoressa P. Fantini sulla parabola di carattere interdisciplinare, utilizzando un approccio storico all’argomento. Nel terzo capitolo, infine, presenterò il questionario proposto agli studenti per la rilevazione di impressioni e opinioni al termine del progetto presentato. I dati rilevati risultano fondamentali in quanto forniscono un riscontro tangibile sull’effettiva attuabilità del metodo interdisciplinare tra matematica e fisica a livello liceale.

CAPITOLO 1

LA PARABOLA COME CASO PER L'INTERDISCIPLINARITÀ NELL'INSEGNAMENTO TRA MATEMATICA E FISICA

1.1 Interdisciplinarità tra matematica e fisica

Il tema principale del lavoro di tesi riguarda l'interdisciplinarità tra fisica e matematica nell'insegnamento a livello di scuola secondaria superiore. Per iniziare il lavoro mi sono chiesto: cosa significa interdisciplinarità?

Per rispondere, sono partito dal significato etimologico di disciplina, che assieme al prefisso *inter* compone la parola. Disciplina viene dal latino *discere* che significa imparare, apprendere. Ha poi, per traslato, altri significati quali:

1) Sistema, scuola filosofica.

2) Imperativo morale, linea di condotta, autodisciplina.

Disciplina oltre al significato di apprendere, per traslato, può significare conoscenza e scienza, può essere conoscenza in senso lato ma può anche essere interpretato come insegnamento. Possiamo quindi interpretare la disciplina come bagaglio di conoscenza che viene tramandata: questa considerazione nasce dal fatto che da disciplina deriva la parola "discepolo".

Diverse parole includono disciplinarità quali, ad esempio, transdisciplinarità, multidisciplinarità e interdisciplinarità. Con l'aggiunta del prefisso *trans*, il termine assume il significato di "al di là della disciplina", al di là della struttura delle discipline, superando le barriere artificiali, ma non implica necessariamente un confronto e uno scambio tra le parti. Con il prefisso *multi*, si ottiene il significato di "che integra diverse discipline", rappresenta la giustapposizione di diversi saperi ma non implica reciprocità; una relazione rimane allo stato di insieme di elementi, ognuno con la propria struttura ben definita. Il prefisso *inter,* invece, porta in sé l'idea di una relazione e reciprocità tra le parti in causa, quindi uno scambio reciproco, pur mantenendo ogni disciplina la propria struttura, ma avendo la possibilità di fondersi per creare una nuova struttura che abbia come basi le due discipline di partenza. Rappresenta un dialogo tra le parti, uno scambio di buone prassi.

"Noi parliamo di interdisciplinarità quando le discipline si integrano a vicenda, interagiscono, e si fondono; parliamo di multidisciplinarità quando le discipline sono giustapposte, sequenziali e coordinate […] Quando la matematica è puramente strumentale e la fisica un semplice contesto di applicazione, possiamo parlare di multidisciplinarità". (Branchetti, Cattabriga, & Levrini, 2019).

Il tema dell'interdisciplinarità è oggi oggetto di molti studi nel campo della ricerca in Didattica della Scienza. Alcuni riguardano nello specifico l'interazione tra matematica e fisica e mirano ad affrontare il problema espresso da Karam nell'introduzione al numero speciale della rivista *Science & Education*: "nell'insegnamento della fisica, è usuale che la matematica venga vista come un semplice strumento per descrivere e calcolare, mentre nell'insegnamento della matematica, la fisica è comunemente vista come un possibile contesto per l'applicazione di concetti matematici precedentemente definiti astrattamente. […] L'analisi dei *case studies* della storia spesso amplia la nostra comprensione di questa interazione [tra matematica e fisica]" (Karam, 2015). Esempi del ruolo della matematica nella fisica sono presentati in articoli del numero speciale sulla rivista *Science & Education* (2015): secondo Brush, ad esempio, la matematica è un istigatore di rivoluzioni scientifiche (Brush, 2015); Kragh sottolinea il potere creativo delle analogie formali in fisica, dimostrando che la matematica fornisce strutture formali che ci permettono di ragionare su nuovi fenomeni, a partire da quelli conosciuti (Kragh, 2015).

Nel panorama dell'insegnamento, spesso, si riscontrano difficoltà nel far emergere i ruoli autentici che ricoprono la matematica nella fisica e la fisica nella matematica. In questo contesto, l'elaborato affronta il tema, facendo riferimento ad un caso specifico – lo studio della parabola e dei moti parabolici – in cui l'interdisciplinarità è esplorata attraverso un approccio storico ed epistemologico. Si ritiene che un approccio storico possa valorizzare l'intreccio fondamentale tra matematica e fisica e la stretta connessione con altre aree della conoscenza come filosofia, perché i momenti di profonda rivoluzione scientifica hanno sempre visto il sapere ridefinirsi in contesti ampi e intrecciati. L'intento specifico è quello di mostrare, attraverso l'analisi di un caso specifico, come le due discipline possano giovarsi del loro dialogo e come il loro intreccio sia in grado di produrre nuova conoscenza.

Le domande alla base del mio lavoro sono: in che modo l'insegnamento a livello di scuola superiore può stimolare gli studenti a comprendere i ruoli autentici della matematica nello sviluppo della fisica e viceversa? In particolare: in che modo l'insegnamento a livello di scuola secondaria può evidenziare la natura interdisciplinare della matematica e della fisica, così da non ridurre la matematica a un semplice strumento per la fisica? Che effetto ha sugli studenti un approccio storico epistemologico dell'insegnamento sulla comprensione, le epistemologie e lo sviluppo di nuove abilità?

Il lavoro si inserisce nell'ambito del progetto europeo Erasmus + IDENTITIES (cfr. §1.2) e consiste nell'aver innanzitutto seguito/osservato un corso per docenti in servizio sul tema della parabola e realizzato nel Piano Lauree Scientifiche in collaborazione con POT (cfr.§1.3).

Un'attività del corso è stata quindi riadattata per essere realizzata in una classe III di Liceo scientifico. Il monitoraggio del contesto e dell'attività svolta sono stati il cuore della mia tesi, finalizzata a rispondere a questa domanda: come reagisce una classe di Liceo all'approccio storico-epistemologico all'interdisciplinarità tra matematica e fisica che si sta sviluppando a Bologna nell'ambito del progetto IDENTITIES?

L'indagine e i suoi risultati sono riportati nei capitoli 2 e 3.

1.2 Il progetto IDENTITIES

IDENTITIES è un progetto Europeo Erasmus +, coordinato dalla professoressa Olivia Levrini del Dipartimento di Fisica e Astronomia di Bologna, che vede la *partnership* strategica (SP) di cinque università di quattro diversi paesi europei, Francia, Grecia, Italia e Spagna, dalla durata di 36 mesi, dal 01.09.2019 al 31.08.2022. Il titolo del progetto è l'acronimo di "Integrate Disciplines to Elaborate Novel Teaching approaches to InTerdisciplinarity and Innovate pre-service teacher Education for STEM challenges", IDENTITIES.

In un mondo in cui si discute sempre di più dei problemi derivanti da una iper-specializzazione della formazione, il progetto IDENTITIES si pone la domanda di quale approccio interdisciplinare all'insegnamento della matematica, fisica e informatica possa guidare studenti e insegnanti nello sviluppare competenze di comprensione della realtà che diventa sempre più complessa. Il principale obiettivo che IDENTITIES si pone è l'elaborazione di un modello di insegnamento interdisciplinare in ambito STEM, che risponda alle esigenze di un presente in continua e rapida evoluzione, ovvero la progettazione di nuovi approcci didattici sull'interdisciplinarità nella scienza e nella matematica per innovare la formazione iniziale degli insegnanti.

L'interdisciplinarità è esplorata mettendo in evidenza delle strutture linguistiche e epistemologiche che caratterizzano le identità disciplinari, i loro intrecci e le loro integrazioni. I contesti che permetteranno di esplorare le forme di conoscenza interdisciplinare, organizzazione e progettazione di attività in classe e nuovi modelli di co-insegnamento, saranno sia temi STEM avanzati (ad esempio i cambiamenti climatici, l'intelligenza artificiale, le nanotecnologie) sia argomenti interdisciplinari curricolari (crittografia, parabola, geometria non euclidea e gravitazione).

Il progetto, infine, porterà alla costruzione di risorse educative a libero accesso per moduli integrati e MOOC *(Massive Open Online Courses*; in italiano, «Corsi online aperti su larga scala»), nonché a raccomandazioni per i responsabili politici per promuovere l'interdisciplinarietà e innovare la formazione dei futuri insegnanti per le sfide STEM.

Come prima attività del progetto IDENTITIES, il gruppo di ricerca in Didattica della Fisica del Dipartimento di Fisica e Astronomia di Bologna, in collaborazione con il Dipartimento di Matematica (Alessia Cattabriga), il Dipartimento di Filologia Classica e Italianistica (Matteo Viale) e il Dipartimento di Filosofia e Comunicazione (Sebastiano Moruzzi e Carlotta Capuccino) e con la collaborazione di docenti esterni (Laura Branchetti, Università di Parma; Paola Fantini, Liceo A. Einstein Rimini, e Veronica Bagaglini, Università di Pisa) ha organizzato il corso per docenti in servizio che descriverò nel prossimo paragrafo.

1.3 Il corso per docenti in servizio

Il corso per docenti è stato realizzato nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche di Bologna (PLS) in collaborazione, per la prima volta, col POT di Studi Umanistici *Oltre le due culture: per un dialogo interdisciplinare fra logica, filosofia e scienze della comunicazione.*

Il corso, dal titolo: "Strumenti di analisi e comprensione del testo scientifico per l'interdisciplinarità: un confronto tra fonti e manuali su temi di fisica e matematica", è stato rivolto soprattutto a insegnati di matematica e fisica delle scuole superiori, ma era aperto anche al contributo di docenti di lettere e filosofia.

Si è trattato di un corso intensivo di 12 ore, articolato in 3 incontri e un workshop con lavori di gruppo su temi/esempi di fisica e matematica. Il corso ha proseguito la riflessione che da anni si sta sviluppando nel PLS di Bologna sul tema dell'interdisciplinarità tra matematica e fisica.

Il corso si è suddiviso in 4 appuntamenti così organizzati:

- 13 novembre, 2019, h. 15-18 – Introduzione al corso (O. Levrini). Presentazione del tema e dei testi selezionati: loro analisi disciplinare (Laura Branchetti, Alessia Cattabriga, Paola Fantini)
- 27 novembre, 2019, h. 15-18 – Strumenti linguistici per l'analisi dei testi (Veronica Bagaglini, Matteo Viale)
- 4 dicembre, 2019, h. 15-18 - Strumenti epistemologici per un'analisi argomentativa dei testi (Sebastiano Moruzzi, Carlotta Capuccino; tutor: Enrico Liverani, Alessia Marchetti, Elena Tassoni, Luca Zanetti)

- 18 dicembre, 2019, h. 15-18 – Workshop (tutor: Eleonora Barelli, Enrico Liverani, Alessia Marchetti, Sara Satanassi, Elena Tassoni, Luca Zanetti)

L'oggetto del corso è stata la riflessione sull'interdisciplinarità a partire dal caso della parabola. La parabola durante le lezioni è stata analizzata come possibile anello di congiunzione principalmente tra matematica e fisica, ma anche come sorgente di possibili collegamenti con discipline umanistiche quali storia, linguistica e filosofia.

Per gli incontri sono stati selezionati testi di diversa natura riguardanti l'argomento. Al fine di fare emergere l'interdisciplinarità, i testi sono stati analizzati con strumenti provenienti dalle discipline e didattiche disciplinari della fisica e della matematica, della linguistica e dell'epistemologia. Nel paragrafo che segue mi concentro sul primo incontro, perché è su quello che si è progettata l'attività realizzata e monitorata in classe.

1.4 La parabola nel suo sviluppo storico e la nascita della fisica moderna

La prima lezione si è composta dall'introduzione al corso da parte della professoressa O. Levrini e dalla presentazione del tema della parabola delle professoresse L. Branchetti, A. Cattabriga e P. Fantini. In particolare mi soffermo sulle argomentazioni trattate dalle professoresse L. Branchetti e P. Fantini. La prima ha illustrato la parabola nella storia della matematica da Euclide a Keplero, mostrando il ruolo della fisica nell'evoluzione della concettualizzazione delle coniche in matematica. La seconda ha trattato il ruolo della parabola nel dibattito tra Guidobaldo e Galileo per mostrare come la matematizzazione, e nello specifico lo studio delle coniche in matematica, abbia portato a porre le basi della fisica come disciplina.

Andando più nel dettaglio, la professoressa Branchetti ha inizialmente proposto una panoramica sullo studio della parabola come oggetto geometrico nell'Antichità, riportando la caratterizzazione classica delle coniche riportata negli Elementi di Euclide e passando attraverso i diversi approcci allo studio delle sezioni coniche proposti da Apollonio (coniche come sezioni di uno stesso cono, coniche come luoghi geometrici, proprietà focali e proprietà legate allo studio delle tangenti), che lo resero celebre al punto da fargli attribuire l'epiteto di Grande Geometra.

Nell'introduzione al tema la professoressa Branchetti ha proposto due differenti significati etimologici della parola parabola. Il primo significato osservato è quello di parabola come "applicare", "comparare", verbo utilizzato da Apollonio: "Apollonio designa i fuochi con la perifrasi «i punti generati dall'applicazione»" (Marchini C., Appunti di Geometria classica

A.A. 2005-2006, Capitolo V- L'opera di Apollonio di Perge, http://old.unipr.it/arpa/urdidmat/Amici/GeoClassCap5.pdf). Il secondo significato è quello di "mettere in parallelo": "Il verbo ha il senso di mettere in parallelo, anche in senso metaforico, come le parabole evangeliche, e quindi di applicare una situazione all'altra. Nel contesto geometrico la parabola si ottiene mettendo parallelo il piano di sezione e una generatrice ottenendo così come sezione tra piano principale e piano secante una rette parallela al triangolo assiale" (Marchini, ibidem).

La teoria delle sezioni coniche in Grecia comincia prima di Apollonio, in particolare il cerchio, la parabola e l'ellisse erano stati individuati e descritti già da Euclide. La definizione di cono di Euclide è introdotta, dalla definizione XI.18 degli Elementi, come la figura che si ottiene facendo ruotare un triangolo rettangolo attorno a un cateto. "A questo punto le sezioni coniche (che in seguito saranno chiamate ellisse, parabola e iperbole) si ottengono come sezioni con un piano perpendicolare al lato del cono, rispettivamente quando il cono è acutangolo, rettangolo o ottusangolo" (Bellé R. & Napolitani P. D., Le sezioni coniche dei Greci, https://web.math.unifi.it/archimede/note_storia/Belle-Napolitani-Coniche.pdf).

Con Apollonio la diversa definizione di cono implica un diverso modo di generare le sezioni. Il cono si ottiene, come scriveva la prof.ssa Branchetti nelle sue slide, "Se una retta, prolungantesi all'infinito e passante sempre per un punto fisso, viene fatta ruotare lungo la circonferenza di un cerchio che non si trovi nello stesso piano del punto in modo che passi successivamente attraverso ogni punto di quella circonferenza, la retta che ruota traccerà la superficie di un cono doppio." Grazie a questa definizione è possibile considerare le coniche:

- come sezioni di uno stesso cono (tutte);
- come luoghi, proprietà focali;
- come caratterizzate da proprietà geometriche relative alle aree ("applicazione" parabolica, ellittica, iperbolica).

Quindi è possibile ottenere tutti e tre i tipi di sezioni nello stesso cono, variando semplicemente l'inclinazione del piano secante (che non è più costretto, come prima, a essere perpendicolare a un lato del cono). In particolare:

1. si ottiene l'ellisse quando il piano secante incontra entrambi i lati del triangolo per l'asse nella stessa falda del cono;
2. si ottiene la parabola quando il piano secante è parallelo a uno dei lati del triangolo;

3. si ottiene l’iperbole quando il piano secante incontra entrambi i lati, ma uno in una falda e uno in un’altra.

Considerando “le coniche come caratterizzate da proprietà geometriche relative alle aree”, si definisce la parabola tramite la proposizione I.11, riportata da Riccardo Bellé e Pier Daniele Napolitani nel “Le sezioni coniche dei Greci” (Bellé, Napolitani, ibidem). Proposizione I.11: Dato il cono *ABC* di vertice *A* e base *BC* si consideri un piano secante che generi una sezione il cui diametro *PM* sia parallelo a uno dei lati del triangolo per l’asse. Sia *QV* un’ordinata relativa al diametro *PM*. Se si traccia una retta *PL* perpendicolare a *PM* nel piano della sezione, tale che $PL : PA = BC^2 : BA \times AC$ allora $QV^2 = PL \times PV$.

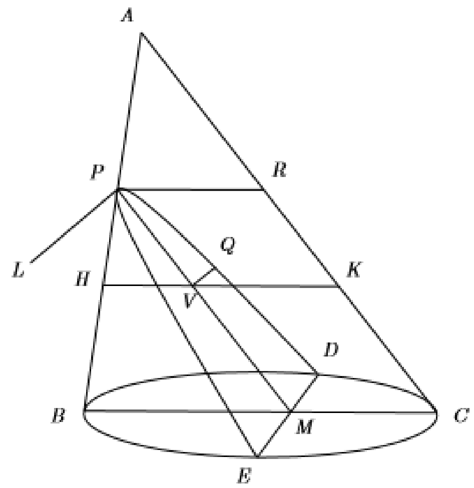

Fig. 1.1: Il sintomo della parabola

La sezione così ottenuta si chiama parabola e la retta fissa *PL* (rispetto alla quale si realizza l’uguaglianza fra il quadrato di una qualsiasi ordinata e il rettangolo costruito sull’ascissa e tale retta fissa) è detta lato retto della parabola.

Per quanto riguarda il concetto di “fuoco”, in Apollonio, non è presente propriamente la questa parola per la parabola, anche se nell’Antichità le proprietà focali della parabola erano senz’altro note. In Apollonio, come espone Marchini nel suo capitolo:

1. i fuochi non erano chiamati fuochi ma erano “punti determinati dall’applicazione”;
2. la caratterizzazione geometrica non proveniva da proprietà fisiche in modo esplicito (Marchini, ibidem).

Sono stati inoltre messi in evidenza due temi importanti connessi allo studio delle coniche, entrambi legati alla loro costruzione: le sezioni coniche possono essere generate nello spazio attraverso intersezioni tra un piano e un cono, ma è molto importante prendere in considerazione anche la costruzione delle coniche come luoghi realizzata attraverso macchine matematiche; infatti nel mondo greco la costruzione degli enti geometrici attraverso l'uso di strumenti che "incorporassero" proprietà in base agli schemi d'uso della macchina era di estrema importanza (si pensi alla riga e al compasso, strumenti chiave negli Elementi di Euclide, con forte valenza teorica). La costruibilità delle coniche attraverso macchine "a filo" è legata alla caratterizzazione delle coniche attraverso le proprietà focali; nonostante le note proprietà focali della parabola (legate anche a studi e leggende, come quella degli specchi ustori), lo stesso Apollonio escluse la parabola dalla trattazione sulle proprietà focali delle coniche; non è un caso che fino a Keplero si riscontri la mancanza di una macchina a filo che permettesse di costruirla.

Perché Apollonio trattò la parabola in modo diverso nel momento in cui si concentra sulle proprietà focali? Questo tema è stato oggetto di una riflessione che ha consentito di mostrare un episodio in cui lo studio di un problema fisico ha consentito di superare un ostacolo epistemologico importante che "bloccava" la teorizzazione di Apollonio in termini di proprietà focali della parabola: il concetto di punto all'infinito. Su questo torneremo con maggiori dettagli nella descrizione della seconda parte dell'intervento della Prof.ssa Branchetti.

L'idea principale che doveva emergere dalla prima parte della lezione, dedicata alla costruzione di un autentico approccio disciplinare, è che, nella storia, a differenza di quanto non si faccia solitamente a scuola, la parabola è stata studiata da diversi punti di vista e senza mai far uso della geometria analitica e dell'equazione, dipendente dal sistema di riferimento. È stata cioè studiata come oggetto geometrico in sé e non come proporzionalità quadratica esprimibile da equazioni. Questa trattazione aveva dunque l'obiettivo di mostrare come gli oggetti matematici si prestino a più interpretazioni e possano essere presentati sotto punti di vista anche sostanzialmente differenti: una parabola può essere presentata senza l'utilizzo del piano cartesiano e della sua equazione canonica, ma fondata sulle sue proprietà geometriche. Ulteriore obiettivo della riflessione era mostrare come si sia cambiato il modo di "fare matematica", fornendo un possibile spunto su come la matematica abbia preso forma e sia evoluta nel tempo, con attenzione anche all'importante tema, fondazionale e didattico, del ruolo centrale svolto dalle macchine matematiche nella storia della disciplina.

Nella seconda parte della lezione sono stati messi in evidenza alcuni momenti chiave che consentono di mostrare il valore dell'interdisciplinarità nell'evoluzione delle discipline; uno di questi, come è già stato anticipato, è quello del "fuoco all'infinito" della parabola, il "fuoco cieco”. C’era infatti una ragione se Apollonio aveva evitato di includere la parabola nella trattazione basata sulle proprietà focali: nel caso della parabola “le linee che, riflesse, convergono verso il fuoco”, per usare una metafora fisica, sono parallele. Lo studio delle rette parallele e delle rette incidenti nell’Antichità era condotto in modo assolutamente autonomo e, come è ben noto, è proprio sulla caratterizzazione delle rette parallele che si concentrano i maggiori elementi di interesse, ma anche di criticità, dell’opera di Euclide. A monte c’era un tema ben più ampio e cruciale per gli Antichi Greci: il concetto di infinito, noto ostacolo epistemologico (si pensi al diktat aristotelico che vietava l’uso dell’infinito attuale e al suo impatto sui postulati euclidei). Per pensare alle rette parallele come rette che possono incontrarsi in un “punto all’infinito” serviva un importante passo in avanti non solo dal punto di vista concettuale, ma anche dal punto di vista filosofico. Sono passati secoli, ed è stato necessario uscire dai vincoli teorici della disciplina, per poter fare questo importante avanti.

Sarà Keplero a portare avanti in modo significativo lo studio della parabola in analogia alle altre coniche da questo punto di vista, proprio grazie a un’escursione nello studio dei fenomeni ottici.

Per l’interesse che le coniche presentavano in altre ricerche, per lo più di fisica e in particolare di ottica, il loro studio viene ripreso con fervore intorno al XIII secolo. In questo periodo Witelo, nell’Ottica (opera composta intorno al 1270 in Italia), riprese lo studio delle proprietà focali delle coniche, in quanto tali proprietà trovano applicazione negli specchi ustori (specchi le cui superfici hanno la forma di un paraboloide di rotazione).

Nel passo divenuto celebre del cap. IV dell’opera *Astronomiae pars optica (Paralipomena ad Vitellionem),* “Keplero pone essenzialmente il *principio di continuità,* che esprime sotto forma d’una *legge d’analogia*; in quanto egli presenta le tre specie di coniche come dedotte, l’una dall’altra, per deformazione continua in uno stesso piano” (Viola T., Il contributo di Keplero alla teoria delle coniche, http://www.mathesisnazionale.it/mathesisbkp/archivio-storico-articoli-mathesis/68_83.pdf). Ovvero una famiglia di coniche ha in comune: un’asse s, un fuoco F_1 ed il vertice V_1 (entrambi su s), e perciò anche la tangente t in V_1. Indicando con a la distanza F_1V_1 e con x la distanza F_2V_1, con F_2 il secondo fuoco, è possibile al variare di x ottenere tutte le coniche. In particolare si ottiene la parabola per $x = \pm\infty$.

F_2.

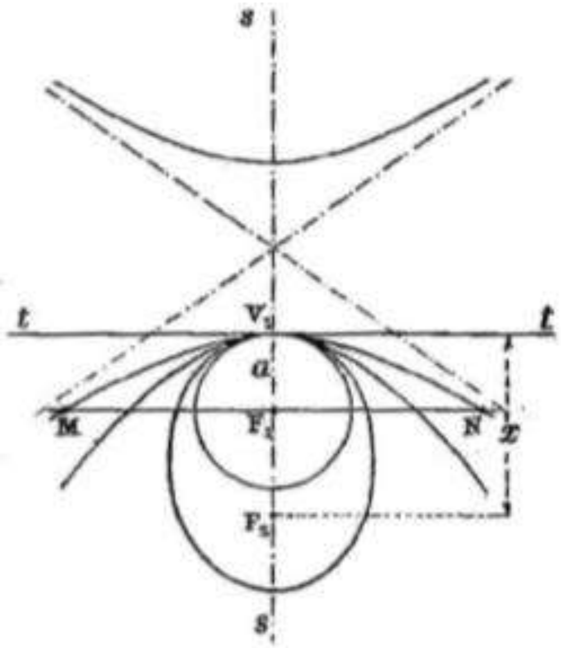

Fig. 1.2: Deformazione continua del piano

Keplero è fermamente convinto del fatto che, in natura, fenomeni apparentemente senza alcuna relazione fra loro, studiati profondamente e in modo dettagliato, possano presentare sorprendenti analogie. Guidati da queste, i fisici riescono talvolta a creare una sintesi tra le varie teorie. “È interessante confrontare, da questo punto di vista Galileo e Keplero, contemporanei, incarnazioni del genio scientifico di due popoli profondamente diversi di civiltà. Galileo chiude il Rinascimento italiano, quasi riassumendone in sé le virtù classiche, con «quella franchezza e libertà di pensare, placida, tranquilla, sicura e non forzata», come il Leopardi l’ha definita. Keplero sorge in una Germania in parte ancora barbara e sembra come trascinato da un’ardente, quasi poetica fantasia, alle intuizioni più geniali e profonde, ma talvolta anche alle più strane, assurde, infantili ipotesi.” (Viola, ibidem)

Proprio spinto da questa forte credenza nell’utilizzo dell’analogia, Keplero studiò riflessione e rifrazione cercando, appunto, un’analogia tra i due fenomeni tramite le coniche. Per tale scopo, considera la superficie di separazione tra un mezzo più denso B a uno meno denso A come piano tangente a un ellissoide di rotazione in un suo vertice e un raggio incidente su tale piano e rifratto sul fuoco F_1 dell’ellissoide. (Figura 1.3) Prendendo la superficie interna dell’ellissoide riflettente, e ponendo in F_1 una sorgente luminosa, il raggio riflesso v incontra F_2.

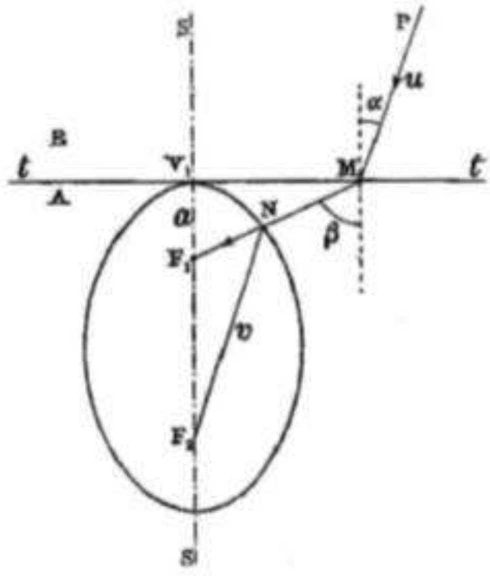

Fig. 1.3: Ellissoide di rotazione con analogia tra riflessione e rifrazione

L'analogia di Keplero consiste nel dimostrare come il raggio riflesso NF_2 sia parallelo al raggio incidente *u: Keplero forza l'analogia al caso delle rette parallele pensandole come caso particolare di rette incidenti che si incontrano all'infinito*. I tempi erano maturi anche grazie ai primi studi teorici di Geometria proiettiva, che stavano iniziando a circolare negli ambienti scientifici.

Simili costruzioni vengono proposte anche considerando altre coniche non portando comunque ai risultati sperati, ma non è questo il punto: l'aspetto interessante è che grazie a questo studio Keplero trova un modo per unificare lo studio di tutte le coniche dal punto di vista delle loro proprietà focali, includendo anche la parabola e mostrando che "posizione" occupa in un'ideale continuum (conica limite tra ellisse e iperbole), non più nello spazio ma nel piano.

Come mette in evidenza Tullio Viola in "Il contributo di Keplero alla teoria delle coniche" si possono trarre le seguenti conclusioni:

1. "Keplero è mosso a interessarsi delle coniche da un problema fisico, che egli cerca di risolvere supponendo una certa analogia tra il fenomeno di rifrazione e quello di riflessione.
2. L'idea di deformare per continuità le coniche (o, ciò ch'è lo stesso, le quadriche rotonde generate dalla rotazione di tali coniche intorno all'asse *s*), proviene dall'immaginare che la densità del mezzo rifrangente (mezzo *B*) vari con continuità.

3. Le analogie geometriche delle varie specie di coniche, fra loro e con le coniche limite (cerchio, retta, parabola), sono studiate in quanto rappresentatrici di analogie fisiche." (Viola, ibidem)

Una volta messo in evidenza il ruolo svolto dalla fisica nella caratterizzazione delle coniche in matematica, introducendo il concetto di fuoco all'infinito e la possibilità di costruire con una macchina una parabola, si è passati ad analizzare il ruolo della parabola nella nascita della fisica svolto, nello specifico, nel dialogo fondativo tra Guidobaldo e Galileo.

La professoressa P. Fantini ha infatti proposto un intervento finalizzato a presentare come la parabola sia stata protagonista nei passaggi fondamentali che hanno portato alla nascita della fisica moderna e a ciò che la caratterizza come disciplina: il metodo scientifico basato sull'esperimento, inteso come metodo per produrre nuova conoscenza, e l'adozione del linguaggio matematico come linguaggio per indagare la natura. La parabola, nel dibattito di fine '500, entra come un nuovo strumento concettuale per descrivere i moti, rompendo l'idea che si potessero utilizzare solo circonferenze e rette. Ed è la parabola che fa emergere come la matematica sia incarnabile nella materialità, mostrando una natura *irregolare ma non imprecisa*.

Più nello specifico, la professoressa Fantini ha sottolineato come, sul finire del 1500, la parabola non fosse tra gli schemi interpretativi dei moti dei corpi lanciati da terra verso il cielo e che questi fossero rappresentati solo dalla linea retta e dalla linea circolare: "*Il moto locale, che è quello che noi chiamiamo 'traslazione' è sempre o rettilineo, o circolare, o misto di questi due: perché semplici sono questi due soli. E la ragione è che ci sono anche due sole grandezze semplici, **la linea retta e quella circolare***" (*Aristotele).* Lo studio di questi moti, che risentivano della distinzione aristotelica tra moto violento e moto naturale, rappresentano i primi passi verso la matematizzazione dei fenomeni "sulla Terra".

La presentazione fa riferimento ad un articolo di P. Cerretta che analizza l'esperimento del 1592 condotto da Guidobaldo e Galileo sullo studio del moto parabolico. Lo studio del moto del proiettile può il punto di partenza per risalire ai primordi della scienza del moto. Infatti, la traiettoria perfettamente simmetrica, così tracciata, convinse i due scienziati a rinunciare alla tradizione medievale secondo la quale il movimento del proiettile era determinato da cause nettamente diverse ed asimmetriche: all'inizio dall'impeto impresso nel proiettile e alla fine dal suo movimento naturale verso il centro della Terra." (Cerreta, 2019).

La lezione procede proponendo l'analisi di due testi originali, "*L'esperimento di Guidobaldo e Galileo*" dagli "appunti di Guidobaldo" e "Il modo "veramente *maraviglioso*" di disegnare la parabola" da Discorsi e Dimostrazioni matematiche di Galileo, concludendo con uno sguardo a un "*Gedankenexperiment*" de I Principia di Newton.

L'analisi del brano di Guidobaldo (fig. 1.4) è stata condotta per mostrare come si stesse articolando un discorso che oggi riconosciamo tipico della fisica. Per argomentare questo punto, la professoressa Fantini è partita da questa caratterizzazione delle discipline:

"Discipline <u>come forme di conoscenza organizzata </u>a *diversi livelli* in cui "prendono posto" ***concetti, regole, leggi, modelli di spiegazione, metodi.*** I diversi livelli riguardano:

- *livello ontologico: livello in cui si delineano le* **entità** *che* **costituiscono** *l'oggetto di studio (gli oggetti e le loro trasformazioni);*
- *livello epistemologico: livello in cui la conoscenza scientifica (i suoi* **concetti** *e le sue* **leggi***) è rielaborata per essere "messa in cultura" (Lévy-Leblond), ovvero collocata in un dibattito di ambio respiro che ne evidenzi il contributo specifico nel modificare le visioni correnti;*
- *livello metodologico: livello in cui si prendono in considerazione i* **metodi utilizzati** *per produrre conoscenza;*
- *livello esplicativo: livello in cui si prende in considerazione come sono* **spiegati eventi** *e* ***processi.***

Questi livelli hanno guidato l'analisi del discorso di Guidobaldo. Per mettere in evidenza la struttura del discorso, la professoressa ha colorato diverse frasi coi significati che adesso andiamo a sottolineare.

dagli appunti di Guidobaldo
1592 L'esperimento di Guidobaldo e Galileo

Se si tira una palla o con una balestra o con artiglieria, o con la mano, o con altro instrumento, sopra la linea dell'horizonte, il medesimo viaggio fa nel callar che nel montare e la figura è quella che rivoltata sotto la linea horizontale fa una corda che non stia tirata, essendo l'un e l'altro composto di naturale e di violento et è una linea in vista simile alla parabola et hyperbole e questo si vide meglio con una catena che con una corda, poiché la corda abc, quando ac sono vicini la parte b non si accosta come dovrebbe perché la corda resta in sé dura. Che non fa così una catena, o catenina. La esperienza di questo moto si po' far pigliando una palla tinta d'inchiostro, e tirandola sopra un piano di una tavola, il qual stia quasi perpendicolare all'horizonte, che se ben la palla va saltando, va però facendo li punti, dalli quali si vede chiaro che sicome ella ascende così anco descende ...
la violentia che ella ha acquistato nell'andar sù, fà che nel callar vada medesimamente: superando il moto naturale nel venir giù ... essendo che non ci è ragione che dal C verso DE mostri che si perda a fatto la violentia ....".

Fig. 1.4: Brano tratto dagli appunti di Guidobaldo (riportato in Cerreta, 2019)

Nella prima parte del discorso (colore marrone) viene presentata un'esperienza concreta, seguita da un'osservazione "ad occhio" apparentemente "neutra", che mette in evidenza la simmetria tra ascesa e discesa della pallina (colore blu) e che si concretizza mediante l'immagine di una corda non tesa (colore viola). Questa successione di affermazioni, viste nella loro articolazione, delinea il livello esplicativo che descrive il processo. Già nelle prime righe è possibile notare come si stia costruendo un metodo per produrre conoscenza, rispondendo alle domande: come visualizzare il fenomeno; come e cosa osservare; come "dare ragione" dell'osservazione. Inoltre a livello epistemologico si apre verso una prospettiva assolutamente nuova: la traiettoria è una curva simmetrica.

A questo punto per procedere nella conoscenza, i piani di ragionamento devono "cambiare registro", devono evolvere:

- l'esperienza diventa esperimento (colore marrone);
- l'osservazione diventa interpretazione (colore blu);
- dalla concretizzazione in una corda si passa a quella più rappresentativa di una catena (colore viola).

Questa evoluzione è osservabile nella seconda parte del discorso. Si passa dal notare che "*il medesimo viaggio fa nel callar che nel montare*" ad una interpretazione del fenomeno "*essendo l'un l'altro composto di naturale e violento*". I due moti, naturale e violento, non sono separati ma coesistono e non si ostacolano, e la traiettoria curvilinea e simmetrica deve portare a rivedere il concetto di movimento, segnando così un importante passaggio epistemologico, un cambiamento di paradigma rispetto a quello medioevale. Con la frase *"et è una linea in vista simile alla parabola et hyperbole"* si osa una descrizione/interpretazione matematica della traiettoria: parabola e iperbole sono prese esplicitamente in considerazione come due curve che potrebbero essere compatibili ("*in vista simile*") alla forma della traiettoria, ma poi si ritorna all'idea della corda sostituita con una catena, che non presenta le difficoltà tecniche della corda ("*la corda resta in sé dura*"). In questo delicato passaggio epistemologico, Guidobaldo e Galileo consideravano la catena come materializzazione della combinazione tra moti naturali e moti violenti e come sottolinea Cerreta riprendendo Heibron: la migliore "analogia fra le azioni simultanee dell'allungamento e del peso della catena, da una parte, e i moti violenti e naturali dall'altra" (Heilbron, 2010). Le ipotesi fatte sulla natura matematica della traiettoria si traducono, grazie alla catena, nella fisicità della traiettoria. Si può descrivere così la forma della traiettoria come simmetrica e curvilinea rappresentabile, diremmo oggi in termini moderni, con un arco di catenaria. L'esperienza può così diventare esperimento a sostegno delle congetture precedenti: "*La esperienza di questo moto si po' far pigliando una palla tinta d'inchiostro, e tirandola sopra un piano di una tavola, il qual stia quasi perpendicolare all'horizonte, che se ben la palla va saltando, va però facendo li punti*".

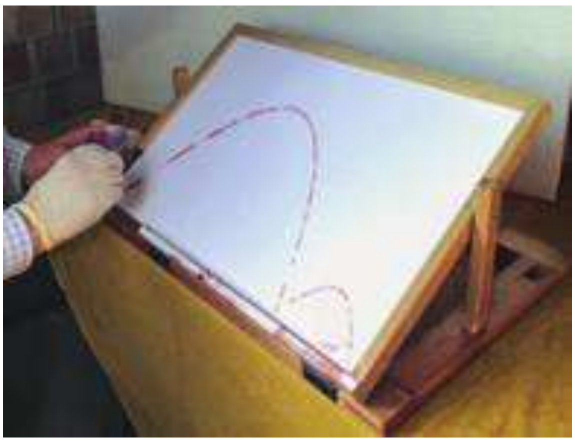

Fig. 1.5: Riproduzione in laboratorio dell'esperimento di Guidobaldo e Galileo (figura tratta da Cerreta, 2019)

Per sintetizzare, l'analisi del brano, svolta con la lente dell'identità della disciplina, mostra come tanti livelli di discorso si articolano per dare "luogo" and un'argomentazione fisica:

- A livello esplicativo, il discorso si snoda passando da un piano descrittivo (osservativo) a un piano interpretativo delle osservazioni.

- A livello metodologico, si introduce il concetto di esperimento che emerge come a seguito di una fase di elaborazione di congetture interpretative e, quindi, a sostegno/valutazione delle stesse. Comincia a farsi strada l'idea che occorre interrogare la natura nel linguaggio matematico e che la teoria matematica precede l'esperienza.
- A livello epistemologico, il ragionamento porta al superamento del paradigma che distingue tra moti naturali e violenti e al cambiamento del concetto di movimento, nonché l'inizio della geometrizzazione della qualità e della forma.

Una volta sottolineati questi passaggi, si è passati ad analizzare un brano di Galileo (fig. 1.6), in cui avviene la vera rivoluzione epistemologica: il far coincidere due oggetti appartenenti a due mondi diversi, la parabola e la traiettoria, e portare al compimento l'idea della matematizzazione dei moti sulla terra.

Il modo "veramente maraviglioso" di disegnare la parabola.

"Modi di disegnar tali linee ce ne son molti, ma due sopra tutti gli altri speditissimi glie ne dirò io:
uno dei quali è veramente maraviglioso, poiché con esso, in manco tempo che col compasso altri disegnerà sottilmente sopra una carta quattro o sei cerchi di differenti grandezze, io posso disegnare trenta e quaranta linee paraboliche, non men giuste sottili e pulite delle circonferenze di essi cerchi. Io ho una palla di bronzo esquisitamente rotonda, non più grande d'una noce; questa, tirata sopra uno specchio di metallo, tenuto non eretto all'orizonte, ma alquanto inchinato, sì che la palla nel moto vi possa camminar sopra, calcandolo leggiermente nel muoversi, lascia una linea parabolica sottilissimamente e pulitissimamente descritta, e più larga e più stretta secondo che la proiezzione si sarà più o meno elevata. Dove anco abbiamo chiara e sensata esperienza il moto dei proiettili farsi per linee paraboliche .... La palla poi, per descrivere al modo detto le parabole, bisogna, con maneggiarla alquanto con la mano, scaldarla ed alquanto inumidirla, ch'e così lascerà più apparenti sopra lo specchio i suoi vestigii"

Fig. 1.6: Brano di Galileo tratto da Discorsi e Dimostrazioni Matematiche

I protagonisti del brano sono due "oggetti" (livello ontologico): la parabola e la traiettoria, rispettivamente di natura matematica e di natura fisica. All'inizio del discorso Galileo dichiara subito l'obiettivo di disegnare una parabola con alcune regole facili e spedite, con un metodo veramente "*maraviglioso*", poiché ugualmente preciso alla "procedura geometrica" conosciuta al tempo, ma estremamente più rapido. In questo caso la "procedura fisica" che porta alla traiettoria viene utilizzata come procedura per disegnare la parabola, un oggetto matematico, ponendola sullo stesso piano della “procedura geometrica” che consiste nel disegno tramite circonferenze e rette.

Nella descrizione della “procedura fisica”, molto dettagliata, si intreccia il piano matematico *“lascia una linea parabolica sottilissimamente e pulitissimamente descritta, e più larga e più stretta”* con il piano sperimentale “*secondo che la proiezzione si sarà più o meno elevata”* facendo riferimento alle condizioni iniziali di lancio della pallina.

Come nel caso precedente la professoressa Fantini fornisce un’analisi del discorso sui diversi livelli dello scritto di Galileo, esplicativo, metodologico ed epistemologico:

- L’analisi del livello esplicativo ci permette di mettere in evidenza una pratica discorsiva molto sofisticata. Il discorso si articola su tre piani: quello matematico, quello “fisico osservativo” e quello più propriamente sperimentale.
- Il livello metodologico mette in luce “l’intrecciamento” dei diversi piani che permette, da una parte, di mettere in evidenza e di chiarire alcune proprietà matematiche della parabola, dall’altra di fare passare il messaggio che la traiettoria è una parabola intesa come oggetto matematico.
- Il livello epistemologico permette di aprire interessanti riflessioni sul ruolo della matematica nella costruzione della scienza del reale (non solo agli albori della scienza moderna…)

Koyré nei sui "Studi Galileiani" afferma che per Galileo il reale e il geometrico non sono eterogenei e la forma geometrica può essere realizzata nella materia. La forma geometrica è “omogenea alla materia”, la natura è “irregolare ma non imprecisa” (Koyré, 1939). Galileo e Guidobaldo sembrano convinti che le leggi geometriche abbiano un valore reale e come dominino la fisica. Per questo motivo il linguaggio con cui occorre interrogare la natura diviene il linguaggio matematico, la matematica terrestre è promossa al rango di quella celeste.

Galileo con i suoi Discorsi fece molto di più che esporre un metodo rapido per poter disegnare una parabola: ponendo sullo stesso piano una procedura per disegnare la parabola tramite rette e circonferenze e una tramite il lancio di una sfera di piombo su di uno specchio, appiattisce i concetti di parabola (concetto matematico) e traiettoria (concetto fisico), concetti storicamente e ontologicamente differenti. Non si parla della traiettoria della sfera sullo specchio, ma di una procedura per disegnare la parabola come oggetto matematico. Galileo sembra negare il carattere astratto delle nozioni matematiche, la dorma geometrica è realizzata nella materia.

	Guidobaldo	Galileo
Livello esplicativo	Si passa dalla descrizione alla interpretazione delle osservazioni	Pratica discorsiva molto sofisticata. Il discorso si articola su tre piani: • quello matematico • quello "fisico osservativo" • quello più propriamente sperimentale.
Livello metodologico	L'esperimento è alla fine delle congetture interpretative a sostegno delle stesse. Comincia a farsi strada l'idea che occorre interrogare la natura nel linguaggio matematico e che la teoria matematica precede l'esperienza.	Si intrecciano così fortemente i diversi piani che da una parte si mettono in evidenza e si chiariscono alcune proprietà matematiche della parabola, ma viceversa si passa il messaggio che la traiettoria è una parabola intesa come oggetto matematico.
Livello epistemologico	• Il superamento del paradigma che distingue tra moti naturali e violenti e il cambiamento del concetto di movimento • L'inizio della geometrizzazione della qualità e della forma	Si possono aprire interessanti riflessioni sul ruolo della matematica nella costruzione della scienza del reale (non solo gli albori della scienza moderna…)

Appiattimento dei concetti di traiettoria (ontologicamente fisico) e parabola (ontologicamente matematico)

Si scardina la convinzione che le uniche strutturi concettuali per interrogare i moti siano la circonferenza e la retta

Linguaggio matematico come mezzo per integrare la natura

Metodo scientifico come mezzo per produrre conoscenza

Fig. 1.7: Sintesi del dibattito tra Galileo e Guidobaldo

L'intervento della professoressa Fantini termina con una breve trattazione del "ritorno dalla terra al cielo" attraverso i "Principia" di Newton: "*Che i pianeti possano essere mantenuti in certe orbite lo possiamo capire facilmente se consideriamo il movimento dei proiettili; infatti una pietra lanciata è costretta, dalla pressione esercitata dal suo stesso peso, a deviare dalla traiettoria rettilinea […] e le viene fatta descrivere una linea curva nell'aria e lungo tale traiettoria incurvata viene alla fine trascinata a terra: e quanto maggiore è la velocità con cui viene lanciata, tanto più lontano essa va prima di cadere a terra. Possiamo pertanto supporre che la velocità aumenti così tanto che la pietra verrebbe a descrivere un arco di molte miglia prima di toccare terra, finché alla fine, superando i limiti della Terra, andrebbe al di là di essa senza toccarla."* (Newton, 1687).

Questa è l'analisi qualitativa del moto sulla terra. *"Possiamo pertanto supporre che la velocità aumenti così tanto che la pietra verrebbe a descrivere un arco di molte miglia prima di toccare terra, finché alla fine, superando i limiti della Terra, andrebbe al di là di essa senza toccarla*." L'esperimento mentale proposto da Newton dà plausibilità al moto ellittico dei pianeti ma il discorso rimane in sospeso, occorre un'analisi quantitativa. L'attenzione viene così rivolta alle condizioni iniziali del moto e dalla velocità, che determinano le caratteristiche della curva. Potendo infine concludere che le curve non sono solo parabole, ma più in generale coniche caratterizzate dalla eccentricità che dipende dalle condizioni fisiche iniziali (i.e. dalla velocità iniziale).

CAPITOLO 2

IL CONTESTO E LE ATTIVITÀ SVOLTE IN CLASSE

In questo capitolo si presenta il contesto in cui è stata svolta l'attività principale oggetto della tesi. Nello specifico, nel prossimo paragrafo è riportata la posizione del prof. Valerio Fiumana sull'interdisciplinarità, così come è stata espressa in un'intervista condotta con lui. Seguono una descrizione della classe e una presentazione di come sono state svolte le lezioni sulla parabola. Particolare attenzione è posta alla lezione della prof.ssa Fantini, perché prima di proporre la sua lettura dei brani di Guidobaldo e Galileo, così come era stata fatta nel corso per docenti del PLS (cfr. capitolo 1), ha introdotto il contesto storico e culturale in cui il dialogo si collocava.

2.1 L'idea di interdisciplinarietà del professore

Come anticipato nell'introduzione, per valutare la portata delle riflessioni sviluppate durante il corso PLS si è ritenuto importante coinvolgere una classe di studenti di scuola secondaria e raccogliere le loro reazioni ad un approccio storico-epistemologico all'interdisciplinarità. A questo fine, ho avuto la possibilità di collaborare con il professor Valerio Fiumana che trattava il tema della parabola in matematica, in una classe III nel periodo di Dicembre 2019-Gennaio 2020. In questa classe, si è progettato un intervento della professoressa Fantini alla fine della trattazione curriculare che ho seguito in prima persona.

Prima di affiancare il professor Fiumana durante le sue lezioni di matematica, ho ritenuto importante avere una conoscenza più approfondita della posizione del docente in merito al tema 'interdisciplinarità' e alle metodologie di insegnamento da lui utilizzate. Il professor Fiumana è docente di matematica e fisica del liceo scientifico Paulucci di Calboli di Forlì da oltre trent'anni, durante i quali ha insegnato principalmente in classi terze, quarte e quinte. Il Professore si è mostrato disponibile ad un'intervista e interessato all'indagine proposta. In appendice I è riportato il protocollo di intervista utilizzato. Di seguito riporto quanto emerso dall'intervista. Il testo è stato editato e rivisto insieme al docente stesso per poter garantire l'aderenza alle sue opinioni.

L'interdisciplinarità tra matematica e fisica, secondo lui, si manifesta nella "forma galileiana", che vede la matematica come linguaggio della natura, quindi come linguaggio utilizzato nella fisica, ma anche come strumento di indagine e previsione in ambito fisico. Le radici della concezione strumentale nel rapporto tra matematica e fisica emersa in questa risposta sono evidenziate in un articolo di Constantinos Tzanakis dell'università di Creta, nel quale afferma che: "A tutti i livelli d'istruzione […] si suppone che i matematici debbano rimanere in un universo di rigore logico ideale, mentre i fisici sono semplicemente utenti della matematica. […] Ciò si riflette nell'insegnamento della fisica, dove la matematica è semplicemente uno strumento per descrivere e calcolare, mentre, nell'insegnamento della matematica, la fisica è solo un possibile contesto per applicare la matematica precedentemente concepita in modo astratto." (Tzanakis & Thomaidis, 2000). Gli studenti, secondo il docente, in accordo con quanto scritto da Tzanakis, concepiscono la matematica come una disciplina astratta e la fisica come lo studio di qualcosa di reale e di concreto ma, al termine di un percorso interdisciplinare, i ragazzi avranno appreso che la matematica può essere usata per capire meglio i fenomeni reali, per formulare modelli teorici e per fare previsioni. Si potrebbe ottenere così una rivalutazione della matematica agli occhi dello studente tramite il passaggio della matematica dall'astratto al concreto. L'idea del docente è che non tutti gli argomenti siano adatti per essere affrontati in maniera interdisciplinare, ma solo alcuni. In certi casi si corre il rischio di "perdere la disciplina", parlando così del nulla. In temi che sono trattabili tramite interdisciplinarità, tra i quali si inserisce anche la parabola, questa tipologia di trattazione approfondisce le reciproche comprensioni dei diversi aspetti. Personalmente il Professore applicherebbe le metodologie interdisciplinari successivamente a una conoscenza delle basi delle discipline. Egli utilizzerebbe l'interdisciplinarità come strumento a posteriori, come collegamento tra le discipline. Questo approccio a mio parere si pone tra i concetti di interdisciplinarità e multidisciplinarità: si comprende la forte volontà di mantenere le strutture proprie delle discipline in questione, discostandosi dalla giustapposizione, prevista dalla multidisciplinarità, aprendo ad una relazione tra le discipline al termine di una acquisizione accurata della conoscenza. Le lezioni del prof. Fiumana solitamente non saranno interamente dedicate alla sola spiegazione o alle sole interrogazioni, ma comprenderanno entrambe, considerando le interrogazioni tempo utile per un costante ripasso per la classe. Le lezioni sono presentate alla lavagna passo passo per permettere agli studenti di prendere appunti sui quali studiare, relegando così l'utilizzo del libro di testo a strumento di supporto per esercizi, visione di grafici e per avere un fondamentale punto di vista differente oltre quello dettato in classe. Il Professore, nel presentarmi l'ordine degli argomenti con cui verranno esposti in classe, ripropone l'idea di una interdisciplinarità successiva a una buona conoscenza disciplinare: "a grandi linee penso che introdurrò gli argomenti in questo ordine: introduzione geometrica prendendo in considerazione la famiglia delle coniche citando Apollonio, proseguire con una trattazione analitica e quindi introdurre la parabola come luogo geometrico, poi equazione canonica, parabola con asse parallelo all'asse x e poi all'asse y, rette tangenti, argomenti interdisciplinari quali moto parabolico e specchi parabolici, fasci di parabole e infine magari qualche problema di massimo e minimo con la parabola." Le parole chiave che permettono il passaggio da una disciplina all'altra sono: traiettoria, luogo geometrico e curva; quest'ultima in particolare, secondo il Professore, approssima forse meglio l'anello di congiunzione tra le discipline. Alla domanda su quali competenze pensasse fossero necessarie per affrontare la parabola in termini interdisciplinari, la risposta è stata: "sapere e aver capito gli argomenti delle rispettive discipline", e nel rispondere si è soffermato sul concetto competenza. La parola 'competenza' nel sistema scolastico viene intesa come il "saper fare qualcosa" e sempre più spesso si focalizza l'attenzione sul 'saper fare' lasciando impliciti, e quindi spesso dimenticati, i concetti che dovrebbero reggere il significato di questa parola, come, ad esempio, il 'sapere' e il 'capire'. Il concetto di 'saper fare' come parte del significato della parola "competenze" viene riportato da Michele Pellerey matematico e pedagogista: "Gli elementi fondamentali che costituiscono le competenze sono, quindi, le conoscenze che permettono di comprendere come le cose funzionano; i saper fare che indicano come farle funzionare; le metaconoscenze che permettono di gestire le conoscenze e che non sono acquisite soltanto con l'esperienza. Vengono intanto esplicitati i tre ambiti di conoscenze fondamentali: sapere, saper fare, saper essere. La competenza emerge come capacità di mobilizzare tali saperi in concrete situazioni." (Pellerey, 2004). Un altro sguardo sulle competenze nel quale viene mostrata la differenza tra i significati di 'competenza' e 'prestazione' è fornito da Bara: "Con il termine competenza intendo l'insieme delle capacità astratte possedute da un sistema, indipendentemente da come tali capacità sono effettivamente utilizzate. Con il termine prestazione mi riferisco alle capacità effettivamente dimostrate da un sistema in azione, desumibili direttamente dal suo comportamento in una specifica situazione. La differenza è cruciale per discriminare cosa un sistema è in grado di fare in linea di principio, da quello che effettivamente fa in una situazione concreta." (Bara, 1999: 239). La concezione di competenza del professor Fiumana risuona con l'idea di Pellerey di suddivisione del concetto in componenti necessarie per riempire di senso il termine competenza. La partizione del professor Fiumana ricalca quella del professor Pellerey enfatizzando il sapere e il capire come elementi imprescindibili per la conoscenza alle quali si aggiunge, solo in un secondo momento, il saper fare. Confrontando invece le risposte con il pensiero di Bara si può notare come coincidano la definizione di competenza di Bara con i concetti di sapere e capire secondo il professore, ai quali si aggiunge il saper fare, ovvero la prestazione per Bara, per completare una definizione più ampia di competenza.

2.2 Il contesto

La classe III in cui ho svolto l'indagine è una classe in cui il prof. Fiumana insegna solo matematica. Il docente ha presentato la classe come un ambiente nel quale il comportamento dei ragazzi risulta corretto, rispettoso e collaborativo ma non particolarmente propositivo. Sono presenti alunni che mostrano serio interesse e ottime attitudini per matematica. In generale, considerando la lunga esperienza e le tante classi nelle quali ha insegnato, il professore colloca questa terza ad un livello complessivo tra discreto e buono con alcuni elementi molto bravi e pochi con difficoltà rilevanti. La mia prima impressione entrato in classe è stata quella di curiosità generale verso il 'nuovo' elemento della classe, seppur temporaneo. Trascorso circa un mese durante le lezioni di matematica (la durata della trattazione della parabola) in compagnia degli studenti, ho potuto confermare l'impressione, ovvero educazione e rispetto nei confronti del Professore e anche reciprocamente tra compagni, così da creare un ambiente sereno per la convivenza e l'insegnamento. Gli alunni, consapevoli di avere un Professore esigente, preparato e autorevole, hanno mantenuto il silenzio e preso appunti (necessari poi per lo studio a casa), consentendo un lavoro spedito in classe nel susseguirsi di spiegazioni e interrogazioni. Oltre a rispetto ed educazione, l'attenzione in classe è stata costantemente alta, sia durante le interrogazioni, perché sono state presentate come un utile ripasso, nelle quali spesso sono state affrontate tipologie di esercizi sempre differenti, fondamentali per il compito in classe, sia durante le spiegazioni, perché il Professore predilige lo studio sugli appunti, come affermato durante l'intervista. Inoltre, l'attenzione è sempre stata alta anche grazie alle continue domande che il Professore ha rivolto agli studenti, sia durante le interrogazioni sia durante le spiegazioni, volte alla verifica di uno studio e un'attenzione costanti.

Il mio compito all'interno della classe è consistito nell'osservare e prendere note delle lezioni tenute dal Professore, per avere un quadro ben delineato di quel che significa tenere un corso di matematica sulla parabola in una terza liceo. L'intervento della prof.ssa Fantini, a fine percorso, è stato audio-registrato.

2.3 La trattazione della parabola in classe

L'articolazione della trattazione della parabola in classe è sintetizzata nella tabella 2.1.

Tab. 2.1: Articolazione delle lezioni in classe sulla parabola

LEZIONI	ARGOMENTI TRATTATI	METODOLOGIE UTILIZZATE
LEZIONE 1 9/12/2019 1 Ora	Introduzione: coniche per Apollonio	Breve introduzione storica, disegno di un cono intersecato da un piano
	Definizione parabola come luogo geometrico	Lezione orale
	Derivazione dell'equazione parametrica della parabola tramite la sua definizione	Disegno alla lavagna e risoluzione analitica
	Individuazione degli elementi fondamentali della parabola e loro coordinate (per una parabola con vertice con asse // all'asse y e vertice nell'origine degli assi): vertice, asse, fuoco e direttrice.	Spiegazione alla lavagna
LEZIONE 2 10/12/2019 2 Ore	Riflessione sul significato di a	Esempi esplicativi
	Riflessione sul significato di |a|	
	Le coordinate del fuoco e della d; formule per F e d in forma canonica	Interrogazione
LEZIONE 3 11/12/2019 1 Ora	Fasci di rette che intersecano le parabole Condizioni di tangenza	Interrogazione
	Nascita della geometria analitica	Lezione orale
LEZIONE 4 16/12/2019 1 Ora	Riflessione della luce	Richiesta breve ricerca
LEZIONE 5 17/12/2019 2 Ore	Dimostrazione geometrica della proprietà della retta tangente a una parabola: la retta tangente alla parabola in P (punto di tangenza) è bisettrice degli angoli formati dalla retta r passante per P e per F (fuoco) e dalla retta per P e // all'asse che sia chiama s	Disegno e dimostrazione alla lavagna
LEZIONE 6 18/12/2019 1 Ora	Parabola con asse // asse x	Analogie e differenze con parabola con asse // asse y
	Presentazione ricerca su riflessione della luce	Interrogazione
	Cenno su natura duale della luce	Agganciandosi alla ricerca del ragazzo interrogato
LEZIONE 7 7/01/2020 2 Ore	Fasci di parabole	Spiegazione alla lavagna
	Punti base e casistica delle tipologie dei fasci	
LEZIONE 8 13/01/2019 1 Ora	Introduzione del moto del proiettile	Approccio storico
	Eq. parametriche e eq. Cartesiane del moto	Ricavate in modo analitico
	Gittata e gittata massima	
	Esercizio sul moto del proiettile	Interrogazione guidata
LEZIONE 9 14/01/2019 2 Ore	Riflessione sul l'equazione $y=\sqrt{(x)}$ e suo riconoscimento come parabola	Interrogazione
	Esercizio sul moto del proiettile	
	Composizione della velocità di un corpo lungo la traiettoria	Interrogazione guidata

LEZIONE 10 15/01/2019 1 Ora	Esercizi sul moto del proiettile	Interrogazione

Come emrge dalla tabella, la prima lezione, tenuta il 9.12.2019, ha visto un'introduzione all'argomento tramite le coniche per Apollonio. Apollonio è stato presentato come il matematico, risalente ai tempi di Euclide, che scrisse un trattato sulle coniche, mostrando come tutte fossero ottenibili intersecando la superficie di un cono con un piano. Dopo il disegno alla lavagna del cono a due falde, ha intersecato il cono con un piano con inclinazioni differenti per mostrare come ne uscissero, l'ellisse, la circonferenza, la parabola e l'iperbole. Infine ha definito geometricamente la parabola come il risultato dell'intersezione del cono con un piano parallelo a una delle rette generatrici del cono. Viene sottolineato che la parabola è una curva, che può avere più di una definizione, tra cui la definizione di parabola come luogo geometrico: "si chiama parabola il luogo geometrico dei punti del piano cartesiano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice". A questo punto non fornisce un'equazione per la parabola, ma la ricava inserendo questa "curva" in un piano cartesiano:

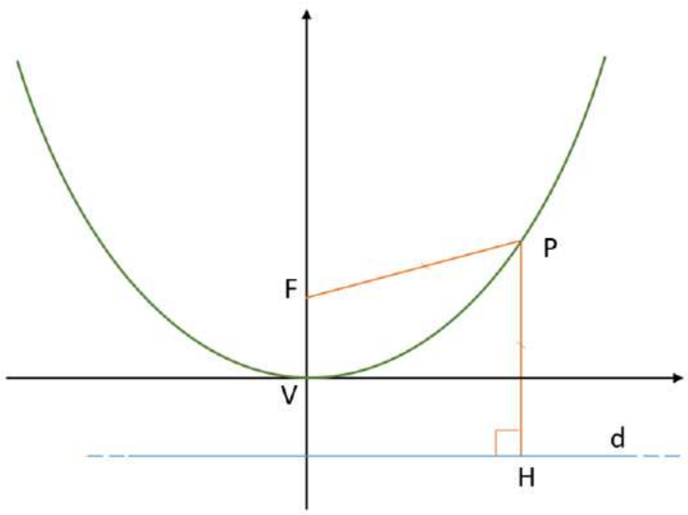

Figura 2.1: Parabola nel piano cartesiano

"Per trovare l'equazione scegliamo un piano cartesiano opportuno, in modo che venga il più facile possibile, lo scegliamo noi come ci conviene, ci poniamo in un caso particolare." Considera l'asse y perpendicolare alla direttrice e l'asse x in modo che l'origine sia equidistante

da fuoco e direttrice. Così facendo le coordinate del fuoco (F) saranno $F(0, p)$ e la direttrice sarà espressa da d: $y = -p$.
Preso un punto qualsiasi $P(x, y)$, utilizzando la definizione di parabola, diremo che $P(x, y)$ appartiene alla parabola se e solo se $PF = PH$, dove H è la proiezione di P sulla direttrice ($y = -p$), ortogonale all'asse x.
Per trovare la distanza PF si utilizza la formula della distanza tra due punti e per PH la distanza tra un punto e una retta. Così facendo si ottiene $PF = \sqrt{(x^2 + y^2 - 2py + p^2)}$ e $PH = |y + p|$. Ora uguagliandoli ed elevandoli al quadrato otteniamo $x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + p^2 + 2py$ da cui $y = x^2/4p$. Ponendo $a = 1/4p$ si ottiene $y = ax^2$.
Riferendosi al disegno il docente fa notare ai ragazzi come la parabola risulti simmetrica rispetto all'asse y, dimostrando con le formule che è una funzione pari.

Nella seconda lezione presenta l'equazione canonica $y = ax^2 + bx + c$ ottenendola dalla traslazione del vertice della parabola vista il giorno prima e focalizza l'attenzione su 'a' e poi su '$|a|$'. Analizza la concavità: se $a < 0$ la parabola rivolge la concavità verso il basso e il vertice è il punto di massima ordinata, se $a > 0$ la parabola rivolge la concavità verso l'alto e il vertice è il punto di minima ordinata. Poi, tramite esempi in cui ha modificato $|a|$, ha mostrato che più $|a|$ è grande, più la parabola è "stretta".

Nella terza lezione viene utilizzata la condizione di tangenza (l'equazione $\Delta = 0$) per risolvere il sistema del fascio proprio di rette di centro P con la parabola, procedimento con cui sono stati svolti diversi esercizi. Al termine di uno di questi il docente ha definito storicamente il concetto di geometria analitica: "Se avete notato, questo esercizio siamo riusciti a risolverlo in maniera solo algebrica, non è stato necessario trovare vertice, fuoco, direttrice e fare il disegno. La geometria analitica è stata introdotta da Fermat e Cartesio, matematici francesi del 1600, non per nulla "piano cartesiano" deriva da René Descartes, matematico e filosofo. Qualcuno si è mai chiesto perché sia necessario tutta la questione del piano cartesiano? La geometria analitica introdotta da Fermat e Cartesio nel 1600 trasforma problemi geometrici in problemi algebrici, e quindi permette di applicare i metodi dell'algebra alla geometria: ai punti vengono associate le coordinate, alle rette e alle curve vengono associate le equazioni; trovare l'intersezione di due curve equivale a risolvere il sistema delle loro equazioni, eccetera. Mi raccomando è molto importante da capire, la geometria analitica è la parte fondamentale della terza, dobbiamo capire il senso di quello che facciamo". Durante la quarta lezione, dedicata principalmente alle interrogazioni è stata richiesta agli studenti una breve ricerca sulla riflessione della luce, guidata da domande quali: "cos'è la luce, cos'è la riflessione e quali sono le due leggi della riflessione?". Questa richiesta viene seguita dal commento del Professore in cui afferma che il giorno seguente avrebbe ripreso in classe gli argomenti, ma che preferiva partire con una base dell'argomento che avrebbe trattato.

La quarta lezione è stata dedicata alla dimostrazione geometrica di una proprietà della retta tangente alla parabola: "la retta tangente alla parabola in P è bisettrice degli angoli formati dalla retta r passante per P e per F e dalla retta s passante per P e perpendicolare alla direttrice".

Nella sesta lezione dopo una prima parte di spiegazione della parabola con asse parallela all'asse x, strutturata basandosi sulle caratteristiche analoghe e di differenza con la parabola con asse parallela all'asse y, è passato alle interrogazioni. L'interrogazione ha avuto come tema principale l'esposizione della ricerca sulla luce, durante la quale il Professore motiva la dimostrazione della proprietà della retta tangente alla parabola, fatta il giorno prima, parlando della seconda legge della riflessione: "L'angolo di incidenza (tra il raggio incidente e la normale alla superficie) e l'angolo di riflessione (tra il raggio riflesso e la normale alla superficie) sono uguali tra loro". Inoltre, dopo aver brevemente spiegato com'è possibile che noi riusciamo a vedere gli oggetti grazie alla riflessione della luce, anticipa la natura duale della luce, (argomento che tratteranno in quinta): "La cattedra come la parete assorbe una parte di luce e ne riflette altra, riflette tutti i colori che sommati danno la luce bianca, i colori sono legati alla frequenza, quindi un'onda con frequenza diversa fornisce un colore differente. Abbiamo parlato di onda. Ora considerando la seconda legge della riflessione, potete pensare a una pallina che urta, quindi si potrebbe pensare alla luce come corpuscolo, che è l'idea di Newton, abbastanza diverso dall'onda. In base a diversi esperimenti è prevalso il modello ondulatorio anche grazie a Maxwell. Nei primi del '900 si scoprì che la luce ha caratteristiche e comportamenti sia da onda che da corpuscolo."

Nella settima lezione vengono introdotti i fasci di parabole ottenuti tramite la combinazione lineare di due parabole. Definiti i punti base come i punti di intersezione delle due parabole generatrici secanti e quindi comuni a tutte le parabole del fascio, presenta i casi particolari nei quali le parabole generatrici sono tangenti e quando non hanno punti in comune. Invita poi a guardare tutti i casi possibili sul libro, dicendo di non impararli a memoria, perché preferisce che si ragioni, esercizio per esercizio, a partire dalle proprietà generali. La lezione si conclude con esercizi sui fasci.

L’ottava lezione è interamente dedicata al moto del proiettile: “nella teoria di Aristotele i corpi si muovono verso il loro luogo naturale, quindi per l’aria il luogo naturale è verso l’alto, verso il cielo, invece per i corpi solidi è verso il basso, verso la Terra. Ovviamente Aristotele sapeva benissimo che lanciando un corpo verso l’alto il sasso va verso l’alto, questo non lo contraddice, perché riceve, secondo la sua teoria, una spinta dall’aria che modifica il moto naturale. Finché dura questa spinta il sasso/proiettile può andare verso l’alto, una volta finito torna al suo moto naturale. Nel medioevo fino al rinascimento si credeva che un proiettile per muoversi avesse bisogno di un “*impetus*” e questo, finché non si esauriva, spingeva l’oggetto in linea retta. Una volta esaurito l’impeto, l’oggetto sarebbe “caduto” verso il suo luogo naturale. Sappiamo che le cose non stanno così. Nel 1600 Galileo nell’ambito di studi di moto relativo (in generale: quello che premeva a Galileo era dimostrare che la Terra si muove, che andava contro tutto e tutti. Per ribattere all’argomento dei gesuiti secondo il quale, se la Terra si muovesse, ce ne dovremo accorgere, scrive il famoso brano del *navilio*, una delle più belle pagine del Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo. Nel brano, Galileo introduce il principio oggi noto come principio di relatività: ponendosi sottocoperta nella nave e prendendo in considerazione varie situazioni di movimento, tra i quali gocce che cadono, mosche che volano…, si osserva come da tutti questi fenomeni non è possibile, se la nave si muove di moto rettilineo uniforme, stabilire se la nave è ferma o se è in moto. Alla luce del principio di relatività, è possibile vedere il moto del proiettile come composizione di due moti tra loro indipendenti: un moto rettilineo uniforme nella direzione orizzontale e un moto rettilineo uniformemente accelerato nella direzione verticale. Oggi, ma possiamo dire dai tempi di Newton, poco dopo Galileo, sappiamo che c’è una spiegazione dinamica, trascurando l’attrito dell’aria ed è così in buona approssimazione per un proiettile, ovvero una forza che agisce verso il basso”. Dopo questa introduzione storica il docente ha introdotto l’equazione del moto rettilineo uniforme lungo x e l’equazione del moto uniformemente accelerato, chiamandole equazioni parametriche del moto dove il parametro è rappresentato dal tempo. Il Professore ha parlato dell’indipendenza dei moti riprendendo Galileo: “Galileo dice che i due moti avvengono indipendentemente” e aggiunge che: “uno perché gli abbiamo dato velocità noi, l’altro grazie alla gravità”.

Esempio: “Due palline, una in caduta libera l’altra gli viene fornita una velocità orizzontale di 1m/s. Quale delle due arriva prima a terra? La risposta è che arrivano allo stesso momento poiché in ogni istante cadono della stessa quantità”.

Successivamente ha ricavato l'equazione cartesiana della traiettoria, mettendo a sistema le due equazioni parametriche dicendo ai ragazzi: "tenete presente che per Aristotele i moti possibili erano quello rettilineo e quello circolare o loro combinazioni, in questo caso vedremo che non è così".
Trovata l'equazione cartesiana è stata introdotta la gittata e l'angolo di lancio di 45° per il quale la gittata risulta massima, ragionando sulle proprietà di seno e coseno.

Nella nona lezione, dopo la risoluzione di un esercizio, durante l'interrogazione in cui si è mostrato come le equazioni del tipo $y = \sqrt{x}$ siano parabole, viene proposta la composizione delle velocità di un oggetto che si muove di moto parabolico in diversi punti della traiettoria come in figura 2.2.

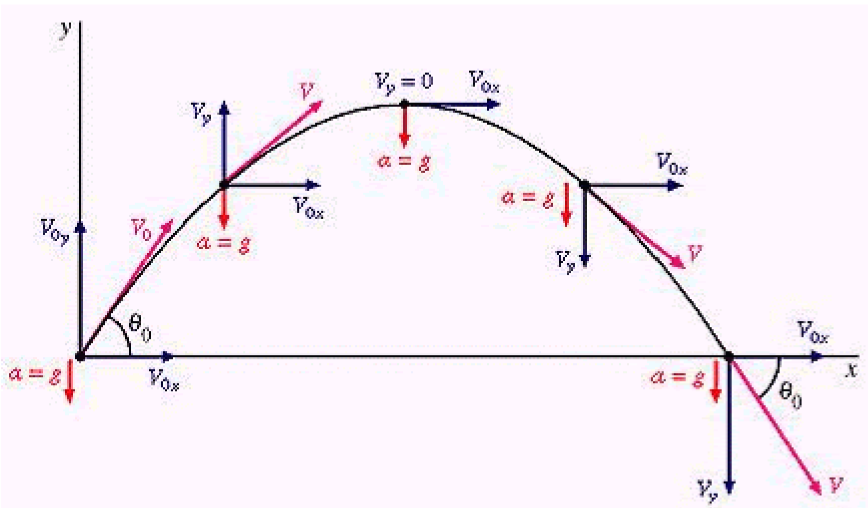

Fig. 2.2: Il moto parabolico

Infine nella decima lezione, così come nella nona, durante le interrogazioni, sono proposti esercizi sul moto parabolico, dei quali riporto i più significativi:

- "Un aereo a una quota di $1{,}5 km$, ha una velocità di $200 km$. Intanto troviamo i dati in unità del SI. Quanto spazio (in metri) prima deve lanciare un pacco affinché esso arrivi in un punto prefissato?"
- "Un proiettile viene sparato con una velocità iniziale $v_0 = 38\ m/s$ contro un bersaglio da un fucile orizzontale. La canna è puntata al centro del bersaglio. Il proiettile colpisce il bersaglio sotto il centro di $6cm$. Qual è la distanza tra la bocca del fucile e il bersaglio?"

- "Un proiettile viene sparato con una velocità $v_0 = 36m/s$ da un'altezza $h = 10m$ dal suolo, con un angolo $\alpha = 60°$ rispetto all'orizzonte, trovare lo spazio che percorre in orizzontale prima di arrivare a terra".

2.4 La lezione della prof.ssa Fantini

"Nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica o della fisica, né la storia può essere ignorata, né la loro stretta interrelazione può essere aggirata o bypassata." (C. Tzanakis, 2016).

Al termine del percorso, ovvero il 21.1.2020, la professoressa Paola Fantini, docente di matematica e fisica del liceo scientifico Albert Einstein di Rimini ora in pensione e collaboratrice del gruppo di ricerca in Didattica della fisica di Bologna da circa vent'anni, ha tenuto una lezione sulla parabola caratterizzata da un approccio storico. Il titolo dell'intervento era "L'affascinante intreccio tra Fisica e Matematica" e, come esplicitato all'inizio, lo scopo principale era mostrare come *"parabole e coniche, nel solo intrecciarsi con lo studio del moto dei proiettili e dei pianeti non fossero solo argomenti scolastici ma protagoniste nel complesso passaggio alla scienza moderna, ovvero, dicendola alla Koiré, nel complesso passaggio da un mondo di qualità a un mondo di quantità e nel difficile cambiamento del concetto di movimento, da movimento come processo a movimento come stato".*

La lezione è stata una sorta di viaggio nella storia, nel quale sono stati messi in risalto i passaggi concettuali che hanno scardinato convinzioni del passato e portato alla nascita della fisica moderna. Sulla base degli obiettivi del progetto IDENTITIES (cfr. 1.2), la lezione è stata organizzata per mettere in luce:

1) il fatto che la conoscenza nasca interdisciplinare e solo a posteriori viene organizzata come noi la conosciamo oggi, ovvero in discipline dalle distinzioni riconoscibili e marcate e che, quindi, l'interdisciplinarità può marcare l'autenticità della conoscenza nel suo sviluppo storico: "lo sviluppo storico delle due scienze non verifica questa separazione. Al contrario, è un fatto relativamente recente, non più vecchio di 100 anni." (Arnold 1998, p.229)
2) come l'analisi di episodi storici e di testi originali possa aiutare a riflettere e a mettere in luce l'identità delle varie discipline.

Rispetto all'intervento nel corso PLS per docenti in servizio, la lezione ha visto una trattazione più estesa del contesto storico in cui il dialogo tra Guidobaldo e Galileo si collocava ritenendo che fossero temi nuovi per studenti e studentesse di III Liceo. Una speciale attenzione è stata inoltre posta sui termini "fisica moderna" e "immagine di scienza".

Dal punto di vista metodologico si è trattato di una lezione frontale, con importanti momenti di lezione dialogata. La linea storica ha visto in successione la trattazione di tre macro-periodi scelti per fissare i nodi concettuali: un'introduzione sull'eredità dei grandi pensatori dell'antica Grecia, Platone e Aristotele, per poi passare per l'epoca di Galileo e Guidobaldo ('500-'600) e i loro dialoghi, e terminare con Newton.

La parabola conosciuta dai ragazzi come "il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto detto fuoco e una retta detta direttrice", viene proposta come protagonista di un dibattito estremamente importante che affonda le proprie radici alle origini del pensiero.

La lezione, dopo un'introduzione circa gli obiettivi dell'incontro, ha visto una riflessione sull'"eredità di Platone e di Aristotele". L'eredità di Platone è stata brevemente ricostruita attorno a tre aspetti: la divisione del mondo celeste da quello sublunare, il geocentrismo, l'organizzazione dei moti celesti circolari come un sistema di sfere (sistema sviluppato da Eudosso e poi da Aristotele). Dell'eredità di Aristotele è stata sottolineata la divisione tra la fisica del mondo celeste (il *Cosmo* visto come un insieme ordinato di «oggetti» aventi ciascuno la propria natura), e la fisica del mondo terrestre (con i moti naturali e violenti). In particolare è stato messo in evidenza come "*il modello perfetto del mondo celeste implichi la sua fisica*": "nella prospettiva aristotelica così come in quella platonica (anche se si tende a stigmatizzare una differenza eccessiva) *la matematica viene usata per la comprensione del mondo celeste e non è adatta a spiegare fenomeni naturali sublunari. Il mondo sublunare nelle sue imperfezioni sfugge ad una trattazione matematica*."

Dalla riflessione sull'eredità di Platone e di Aristotele, si è dunque estratta l'immagine di una netta distinzione tra cieli e Terra. Il mondo celeste, in quanto perfetto, era ritenuto matematizzabile, mentre il mondo terrestre, a causa della presenza di moti violenti che non ne consentono la perfezione, non appariva matematizzabile. Queste idee nel tempo hanno assunto il carattere di veri e propri dogmi, in parte assunti anche dal mondo ecclesiastico, per esempio il modello geocentrico, il quale dominerà fino al '500.

Un altro tassello fondamentale del ragionamento ha riguardato gli studi che, verso la fine del 1500, si facevano sulla Terra, per dar conto dei moti dei corpi lanciati da terra verso il cielo. Erano studi effettuati nell'ambito della "meccanica" e della balistica, che risentivano della distinzione aristotelica tra moto violento e moto naturale. Nel filo del ragionamento, questi studi sono stati presi in considerazione perché hanno rappresentato i primi passi verso la matematizzazione dei fenomeni "sulla Terra" e perché hanno permesso di sottolineare come gli schemi interpretativi fossero rappresentati dalla linea ***retta*** e dalla linea ***circolare:*** "*Il moto locale, che è quello che noi chiamiamo 'traslazione' è sempre o rettilineo, o circolare, o misto di questi due: perché semplici sono questi due soli. E la ragione è che ci sono anche due sole grandezze semplici,* ***la linea retta e quella circolare***" (*Aristotele)*. La parabola non era tra gli schemi interpretativi.

Per introdurre il tema della scienza moderna, la professoressa Fantini, rifacendosi agli Studi Galileiani e Newtoniani di Koyrè, ha sottolineato tre passaggi – tre condizioni fondamentali –, che hanno permesso la nascita della nuova scienza:

1) la rinnovata fiducia nella capacità di raggiungere la verità con le proprie forze, superando il consolidato "rispetto della tradizione e dell'autorità consacrata". Contrapponendosi a queste, la scienza è nata attribuendo una nuova *importanza* all'esperienza e *all'esperimento*. Questo è stato possibile anche grazie alla *rinnovata fiducia dell'uomo moderno in se stesso, e nella sua capacità di raggiungere la verità con le proprie forze* usando sensibilità e intelligenza.
2) Il prendere forma dell'idea della scienza come *scienza activa, operativa* che superava l'idea che la scienza fosse essenzialmente *contemplativa*. La nuova scienza nasce in contesti pratici e deve potersi applicare per risolvere problemi della "vita *activa*" e non più della vita contemplativa tipica medioevale. In questo senso, nasce come "scienza dell'artigiano, dell'ingegnere".
3) La scienza moderna come prodotto del nascente ceto borghese della società moderna. La nuova scienza, come detto al punto precedente, è la scienza dell'artigiano e dell'ingegnere, dell'attivo e intraprendente commerciante. Lo sviluppo della scienza moderna è contestuale alla nascita della società moderna e allo sviluppo delle città, al perfezionamento delle armi che richiamò l'attenzione su problemi di balistica e di navigazione – in India e in America -, i quali favorirono, per esempio, la costruzione degli orologi, dei telescopi e di altri strumenti di navigazione.

Quegli anni possono essere interpretati come il prendere forma dell'idea baconiana[3] per la quale "il dominio dell'uomo consiste solo nella conoscenza: l'uomo tanto può quanto sa". (Rossi, 1975, p.389) In questi anni il paradigma della scienza diventa la meccanica, la meccanica diviene la scienza. Un'immagine evocativa di questa nuova concezione della scienza e del mondo è "il mondo orologio".

Dopo aver introdotto alcuni elementi di contesto che hanno permesso la nascita della scienza moderna, sono stati discussi i due elementi essenziali che hanno caratterizzato il cambiamento. Anche in questo caso il ragionamento fa riferimento al lavoro di A. Koyré nei suoi Studi Galileiani, nei quali sono sottolineati questi due elementi essenziali:

- la distruzione del cosmo;
- la geometrizzazione dello spazio.

Con il primo si intende che "il mondo reale - quello trattato dalla scienza - non è più concepito come un tutto finito e gerarchicamente ordinato cioè qualitativamente e ontologicamente differenziato, ma un Universo aperto, indifferenziato e infinito, tenuto insieme dall'***identità*** degli elementi che lo compongono e dall'***uniformità*** delle leggi." La geometrizzazione dello spazio ha permesso di sostituire l'insieme dei "luoghi" di Aristotele - con l'omogenea e astratta dimensione spaziale della geometria euclidea, ora comunque considerata *reale. La geometrizzazione dello spazio implica anche la sua "infinitizzazione"* considerata *reale.* In questo modo diventa possibile sostituire la concezione del ***cosmo,*** unità chiusa con un preciso ordine gerarchico con quella di ***universo,*** insieme aperto legato dall'unità delle sue leggi.

Il punto cardine del ragionamento è che la formulazione di una nuova ***fisica terrestre è passata attraverso "una rottura dei cieli",*** *ovvero attraverso una ri-fondazione e ri-elaborazione di una nuova meccanica celeste*. Si è sottolineato come il merito di questo importante passaggio concettuale sia da attribuire a Giordano Bruno che "rompe le sfere celesti" e rende possibile il passaggio dal cosmo ad un universo infinito e aperto.

Una volta riaperto il problema astronomico e riproposto nella disputa tra sistema copernicano o sistema tolemaico, la sua soluzione è dipesa, a sua volta, dalla costituzione di una nuova scienza fisica sulla Terra e questa ha presupposto la questione filosofica preliminare sulla ***natura*** **e la** ***struttura di questa scienza***. La nuova scienza e l'identità disciplinare della fisica, per tornare ad uno degli scopi della lezione, prende dunque forma in questo processo fondativo

[3] Sir Francis Bacon, italianizzato in Francesco Bacone (Londra, 22 gennaio 1561 – Londra, 9 aprile 1626) considerato "profeta della tecnica" in qualità di sostenitore e strenuo difensore della Rivoluzione scientifica.

in cui vengono definiti e "piantati" i suoi due pilastri fondamentali: il ***linguaggio matematico*** e il rigoroso ***metodo sperimentale***. Come ha sottolineato la professoressa, "Nella scienza moderna si ha un particolare intreccio tra teoria e tecnica e perché questo sia possibile non basta un semplice rispetto dei fatti osservati, non è possibile un'interrogazione passiva della natura. È necessario, come scrivono Prigogine e Stengers in "La nuova alleanza", "fare una sceneggiatura", preparare il fenomeno, *purificarlo,* ***isolarlo*****,** farlo assomigliare ad una situazione ideale che *non è il fenomeno stesso* ma ciò che lo rende intelligibile." Il "dialogo con la natura" avviene, dunque, con domande che si basano su ***ipotesi teoriche*** e su riposte dalla Natura che devono essere decodificate alla luce delle risposte attese dalla teoria.

Prima di mostrare come questi prendano forma, nel dialogo tra Guidobaldo e Galileo sulla parabola, è stata aperta una riflessione sull'immagine di scienza e su cosa sia la scienza, secondo gli studenti. Si è trattato di un momento molto intenso di lezione dialogata durante la quale la professoressa Fantini ha mostrato due immagini e discusso coi ragazzi quale, secondo loro, descriveva meglio il rapporto tra scienza, natura e scienziato. Le immagini erano state utilizzate in uno studio di diversi anni fa, condotto dal gruppo di ricerca di Bologna con il prof. Igal Galili dell'Università Ebraica di Gerusalemme (Levrini, Bertozzi, Gagliardi, Grimellini-Tomasini, Pecori, Tasquier, Galili, 2014).

Durante la discussione, ogni opinione era accettata come possibile contributo al ragionamento collettivo. La figura 2.3 mostra a sinistra la medaglia del premio Nobel, il cui la scienza "svela", "scopre" la Natura, a sinistra Pigmalione che scolpisce Galatea[4] nell'avorio.

[4] Dal mito di Pigmalione narrato da Ovidio nel X libro delle Metamorfosi (cf. Ov.,Metamorfosi, ed. UTED a cura di Nino Scivoletto, 2009)

Fig. 2.3: Immagini di scienza a confronto

Come scrive Ovidio, nelle Metamorfosi, “Pigmalione rifugge il matrimonio e dedica la propria vita alla solitudine. Decide quindi di modellare una statua, chiamata Galatea, che incarni il proprio ideale di donna e di cui si innamora” (vv. 247-258). “Pigmalione colma la statua di tenerezze: le porta doni, la veste e la orna con orecchini e anelli. La chiama sua amante e la adagia sul letto per farla riposare. Prega gli dei di farla diventare sua sposa. Venere coglie la supplica e il desiderio di Pigmalione diviene realtà” (vv. 280-294).

Le due immagini suggerisco due diverse interpretazioni sulla natura della scienza, sulle quali la Professoressa invita a ragionare. La Scienza è dunque il risultato di un atto di “svelamento” della Natura per mostrarne la sua esistenza e la sua forma intrinseca e oggettiva oppure “un’invenzione” dello scienziato che la produce, ipotizzando teorie statiche prive di senso fino a che un riscontro della realtà non le dona la vita, così come Venere diede la vita a Galatea? La fisica è scoperta o è specchio delle domande dello scienziato?

Aggiungo uno spunto alla trattazione fornendo il punto di vista di Kant: “Quando Galilei fece rotolare le sue sfere su di un piano inclinato con un peso scelto da lui stesso […] fu una rivelazione luminosa per tutti gli investigatori della natura. Essi compresero che la ragione vede solo ciò che lei stessa produce secondo il proprio disegno, e che […] essa deve costringere la natura a rispondere alle sue domande; e non lasciarsi guidare da lei, per dir così, colle redini; perché altrimenti le nostre osservazioni, fatte a caso e senza un disegno prestabilito, non metterebbero capo a una legge necessaria.” (Kant, 1787). Alcuni ragazzi hanno prontamente contribuito allo scambio di idee con la loro opinione, per esempio una risposta al quesito posto è stata: “entrambe, la natura è intesa come scienza in sé e l’invenzione/scoperta è rappresentata dal progresso.”

La discussione era anche funzionale ad introdurre i tre termini che poi sono stati utilizzati nell’analisi dei brani di Guidobaldo e Galileo per sottolineare la ricchezza e la multi-dimensionalità del discorso utilizzato. Nello specifico, la Professoressa ha posto la seguente domanda: Se mi chiedo “cosa conosco del mondo?” e “Com’è il mondo?”, mi sto ponendo la stessa domanda? Le due risposte coincidono?” Questa domanda le ha permesso di sottolineare che ci sono tre diverse domande che non forniscono la stessa risposta e che appartengono a piani differenti del discorso:

1) Come conosco il mondo? Domanda di carattere metodologico, devo rispondere dicendo come mi organizzo e quali strumenti uso per conoscere il mondo.

2) Cosa conosco del mondo? Domanda di carattere epistemologico, devo rispondere interrogandomi sulla natura della mia conoscenza e su cosa questa mi permette di dire, inferire, argomentare.

3) Com’è il mondo? Domanda di carattere ontologico, devo rispondere descrivendo e attribuendo proprietà e caratteristiche alla natura e al mondo

Altri spunti che sono emersi durante la discussione hanno riguardato la creatività: “Dov’è che la realtà ci vincola? A quale livello risiede la creatività?”. Il tema è risultato molto interessante per gli studenti e le studentesse, come hanno anche detto: “Mi è piaciuto poter riflettere su una domanda e che secondo me è giusto valorizzare: ma il lavoro dello scienziato è quello di scoprire e quindi di portare alla luce la realtà o il suo lavoro è quello di scolpire e quindi creare leggi e regole per poter spiegare la realtà? Questa domanda che non mi ero mai posto mi ha intrigato molto e mi ha fatto pensare...”.

Terminata questa riflessione, si è arrivati al cuore della lezione, ovvero a come il dialogo tra Guidobaldo e Galileo sulla parabola abbia contribuito alla nascita della fisica moderna, alla matematizzazione della natura e alla costruzione di un rigoroso metodo sperimentale.

Si è, nello specifico, riportata l’analisi già descritta nel capitolo 1 per insistere su come Guidobaldo e Galileo siano riusciti a matematizzare fenomeni sublunari, portando la matematica dai cieli alla Terra e come, successivamente, Newton abbia riportato, con la sua unificazione, la fisica della Terra al cielo (fig.2.4).

Per fare questo, la Professoressa si è riferita allo studio di Pietro Cerreta (Cerreta, 2019) e ha riproposto l'analisi che aveva già presentato nel corso del PLS per docenti.

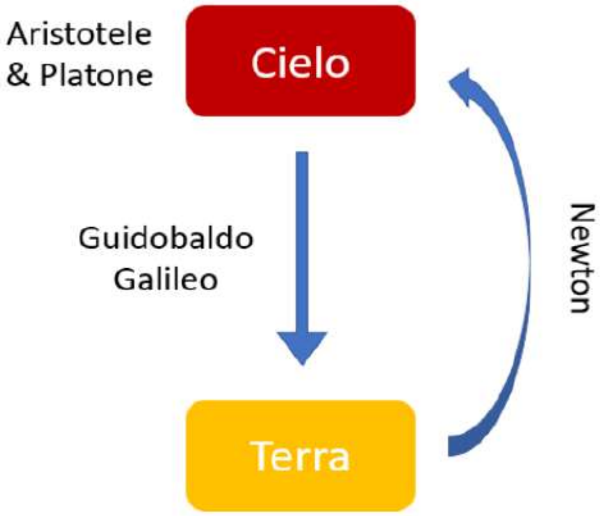

Fig. 2.4 Schema della riflessione della prof.ssa Fantini

CAPITOLO 3

LE REAZIONI DEGLI STUDENTI

Al termine della lezione della professoressa Fantini, abbiamo proposto agli studenti un questionario per valutare l'efficacia di un approccio interdisciplinare all'insegnamento. Nello specifico, il questionario (allegato in appendice II) è stato costruito con lo scopo di indagare le *caratteristiche* che gli studenti associano alle due discipline (matematica e fisica) e di come hanno vissuto l'approccio storico-epistemologico all'interdisciplinarità.

L'analisi dei dati raccolti attraverso il questionario rappresenta il cuore della mia tesi. Di seguito presento il questionario proposto e, quindi, l'analisi dei dati.

3.1 Il questionario

Il questionario si apre con due domande di carattere generale dove viene chiesto di quantificare (1 - per niente, 10 - moltissimo) quanto piaccia la matematica e la fisica.

Dopo di che si individua una struttura del questionario composta da tre macro-sezioni volte ad indagare il rapporto che gli studenti hanno con le due discipline e come percepiscono l'interdisciplinarità.

La prima sezione è dedicata alla matematica. Col fine di indagare il rapporto che gli studenti hanno con la disciplina e di ricavare delle informazioni riguardo a quali *caratteristiche* le associano, è stato chiesto loro di rispondere a tre domande:

i) Cosa ti piace della matematica? Per ogni aspetto sottoelencato, indica se ti piace in una scala da 1 (per niente) a 5 (moltissimo);

ii) Quanto ti sono familiari gli aspetti della matematica elencati di sopra (1 - Non ho proprio idea di che cosa si intenda; 2 - Ho una vaga idea di che cosa si intenda ma non ne sono sicura/o; 3 - Mi è chiaro cosa si intenda);

iii) Quali aspetti della matematica, tra quello elencati di sopra, ti incuriosiscono e vorresti approfondire (1 - sì, mi piacerebbe approfondirli; 2 - no, non mi incuriosiscono).

Gli aspetti della matematica che abbiamo voluto mettere in evidenza e su cui abbiamo cercato di far riflettere gli studenti sono:

- Il suo rigore
- Il suo livello di astrazione
- Il fatto che permetta di stabilire cosa è vero e cosa non lo è
- I ragionamenti che obbliga a fare nelle dimostrazioni
- I ragionamenti che obbliga a fare nel risolvere esercizi e problemi

- La sua intrinseca eleganza
- La sua utilità a risolvere problemi della vita di tutti i giorni
- La sua utilità a risolvere problemi rilevanti dal punto di vista sociale
- La sua utilità a rispondere a domande di conoscenza fondamentali, che l'uomo si è posto da sempre e continua a porsi
- Il ruolo che svolge nel dare rigore e offrire strumenti di pensiero per altre discipline (fisica, informatica, ingegneria, economia…)
- Le domande a cui cerca di dare risposta
- Il fascino delle persone che l'hanno costruita

A queste domande vengono associate le richieste di fornire un commento alle risposte date e di arricchire il discorso.

La seconda parte è dedicata alla fisica e ha lo stesso scopo della prima. Le domande sono analoghe a quelle della sezione precedente, ma gli aspetti della disciplina che abbiamo messo in evidenza sono:

- Il metodo elaborato per formulare leggi il più possibili oggettive, controllabili, condivise
- Il rigore dato dalla matematica
- L 'ancoraggio alla realtà dato dagli esperimenti
- I ragionamenti che obbliga a fare nel cercare di spiegare un fenomeno
- I ragionamenti che obbliga a fare nel risolvere esercizi e problemi
- La sua intrinseca eleganza
- La sua utilità a risolvere problemi della vita di tutti i giorni
- La sua utilità a risolvere problemi rilevanti dal punto di vista sociale
- La sua utilità a rispondere a domande di conoscenza fondamentali, che l'uomo si è posto da sempre e continua a porsi
- Le domande a cui cerca di dare risposta
- Il fascino delle persone che l'hanno costruita

La terza sezione è dedicata all'intreccio tra le due discipline. In questa parte abbiamo chiesto agli studenti di provare a descrivere a) la relazione tra matematica e fisica; b) i motivi per cui può essere utile o produttivo affrontare argomenti di fisica, come il moto parabolico, durante la trattazione della parabola in matematica; c) gli elementi circa l'intreccio tra matematica e fisica messi in luce dalla professoressa Fantini e l'eventuale loro novità.

3.2 Raccolta e analisi dei dati: aspetti metodologici

Il questionario è stato somministrato attraverso un *Google form* e sono stati dati 4 giorni per la compilazione. Nella presentazione è stato descritto il contesto dello studio (il progetto IDENTITIES) e sono state fornite, sia oralmente sia con un documento cartaceo, tutte le informazioni per la gestione, protezione e trattamento dati. In particolare è stato precisato che, ai sensi dell'art. 13 del Regolamento (UE) 2016/679 (Regolamento generale sulla protezione dei dati personali), l'Alma Mater Studiorum – Università di Bologna, in qualità di Titolare del trattamento, tratterà i dati personali nel rispetto di quanto previsto dal Regolamento (UE) 2016/679 (Regolamento generale sulla protezione dei dati personali) e dal D.Lgs. 30 giugno 2003, n. 196, s.m.i. (Codice in materia di protezione dei dati personali).

Il questionario è stato somministrato in forma completamente anonima e la compilazione non era obbligatoria. 19 studenti su 22 hanno risposto. In diversi casi le domande aperte hanno ricevuto risposte articolate, accurate e profonde.

Per l'analisi si è seguito un approccio *bottom-up*, tramite il quale abbiamo ricercato *pattern* a partire dai dati organizzati in istogrammi dei 19 studenti su 22 che hanno compilato il questionario. La ricerca dei *pattern* è stata controllata attraverso un'operazione di triangolazione, ovvero attraverso un controllo e discussione tra tre diverse persone. L'analisi che segue non ha alcun valore statistico, ma è stata condotta per costruire un'immagine della classe e di possibili reazioni che studenti e studentesse di classe III possono avere di fronte ad una proposta come quella offerta.

3.3 Risultati

Il primo risultato emerge in modo molto evidente dalle prime due risposte e riguarda mediamente una decisa preferenza per la disciplina matematica rispetto alla fisica, andamento osservabile anche dai dati riferiti alle caratteristiche proprie delle singole discipline.

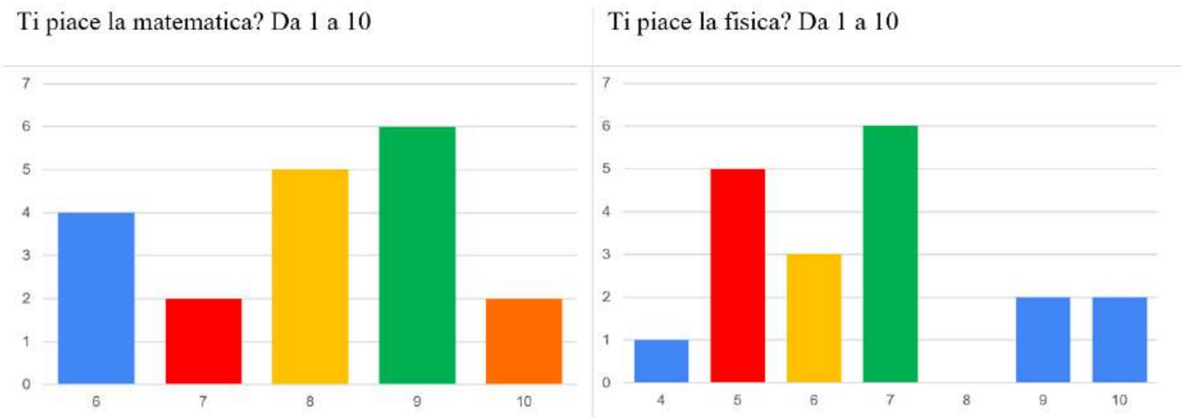

Fig. 3.1: Istogrammi riferiti alle prime due domande

Per quanto riguarda le risposte alla parte del questionario sulla matematica, si nota una divisione equa tra gli aspetti che suscitano, e quelli che non suscitano, interesse e voglia di approfondimento nei ragazzi. In questa parte abbiamo individuato quattro *pattern.*

Il primo *pattern* (cfr. Fig.3.2) emerge accostando le risposte a quattro aspetti della matematica rispetto ai quali gli studenti/le studentesse hanno mostrato di avere posizioni simili. Questi riguardano: il livello di astrazione, l'utilià a risolvere problemi della vita di tutti i giorni, l'utilità a rispondere a domand di conoscenza fondamentali e il ruolo che svolge nel dare rigore e offrire strumenti di pensiero per laltre discipline.

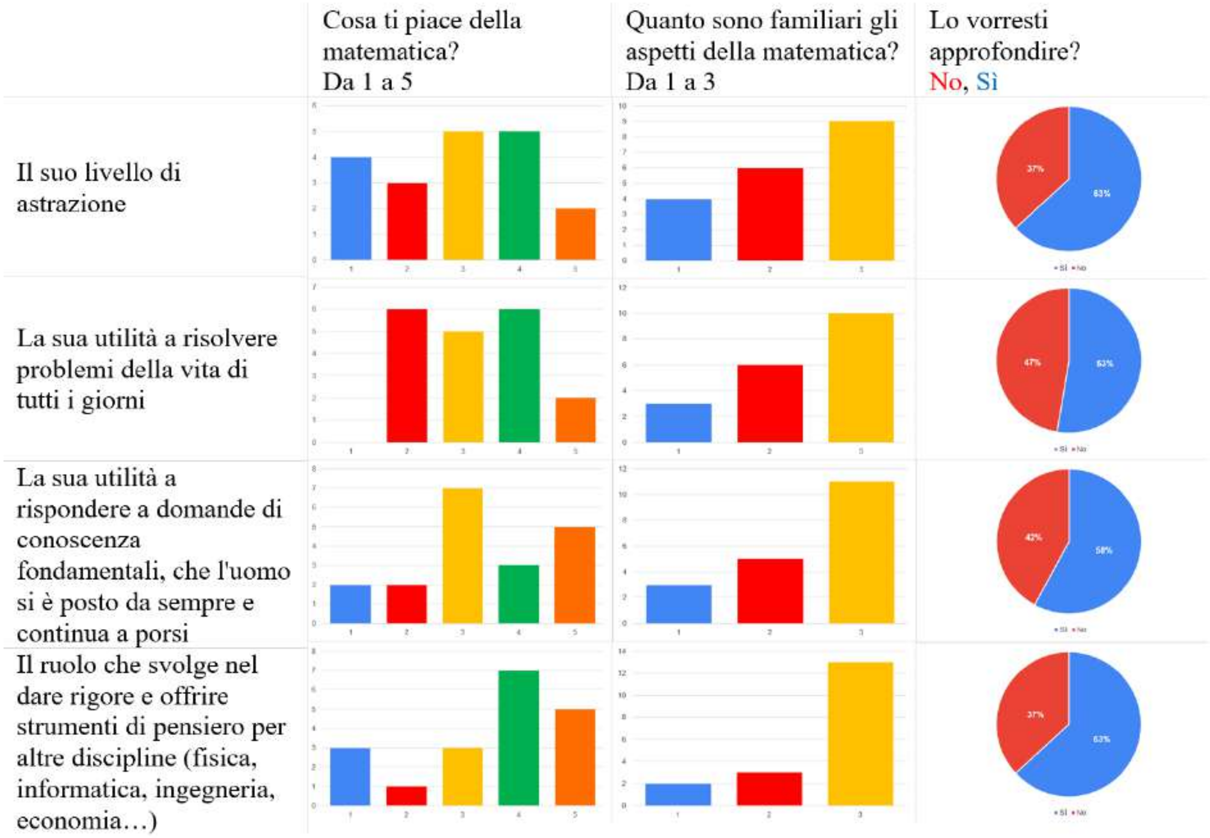

Fig. 3.2: *Pattern* 1 *(matematica)* – Aspetti familiari e ritenuti interessanti per un loro approfondimento

Questo primo gruppo di aspetti infatti sono accomunati dal fatto che risultano familiari e meritano ulteriori approfondimenti. Sul livello di interesse, sembrano aspetti che tendono a piacere, anche se in diversa misura. Ad esempio il livello di astrazione e l'utilità a risolvere problemi di tutti i giorni non sembrano piacere particolarmente. Mettendo insieme questi aspetti dal profilo simile sembra emergere una particolare immagine di matematica, come disciplina che, grazie al proprio livello di astrazione, è in grado di dare struttura ad altre discipline e di rappresentare un modello utile per rispondere a domande di conoscenza fondamentali e per risolvere problemi della vita di tutti i giorni. Dato il livello di familiarità che gli studenti dichiarano, sembra essere un aspetto sottolineato in classe e ritenuto abbastanza importante da meritare un approfondimento. Le risposte aperte confermano che gli studenti e le studentesse di questa classe apprezzano la caratteristica della matematica essere versatile e applicabile in campi di vario tipo. Uno studente sostiene infatti che "*la matematica si ritrovi in tutti gli ambiti e che quindi sia sempre utile e risolutiva*", un altro invece "*Della matematica mi piace il fatto che è universale e precisa, senza fraintendimenti e che è alla base di tutto, dalla crittografia alle applicazioni in ingegneria e fisica.*"

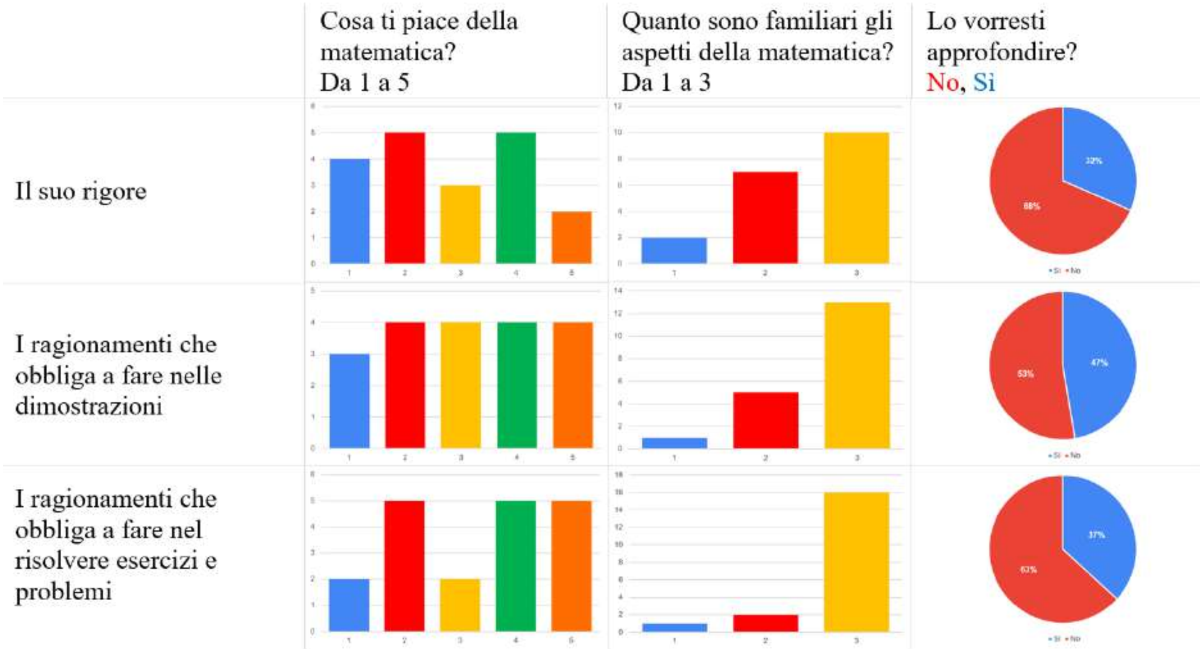

Fig. 3.3: Pattern 2 (matematica) – Aspetti familiari e ritenuti non particolarmente interessanti per approfondimenti

Il secondo *pattern* emerge accostando le risposte agli aspetti che riguardano il rigore, i ragionamenti che obbliga a fare nelle dimostrazioni e i ragionamenti che obbliga a fare per risolvere problemi e esercizi. Le risposte, in questo caso, mostrano che sono aspetti familiari ma non particolarmente interessanti per un approfondimento. L'accostamento in termini di reazioni simili fa pensare che gli studenti interpretino il ruolo del rigore matematico soprattutto con la precisione con cui devono esplicitare i ragionamenti per risolvere esercizi e fare dimostrazioni, ma non entusiasma l'idea di approfondire questo aspetto.

I primi due *pattern* pensiamo possano rappresentare l'immagine della matematica che viene trasmessa loro in classe, dall'alto livello di familiarità con gli aspetti proposti.

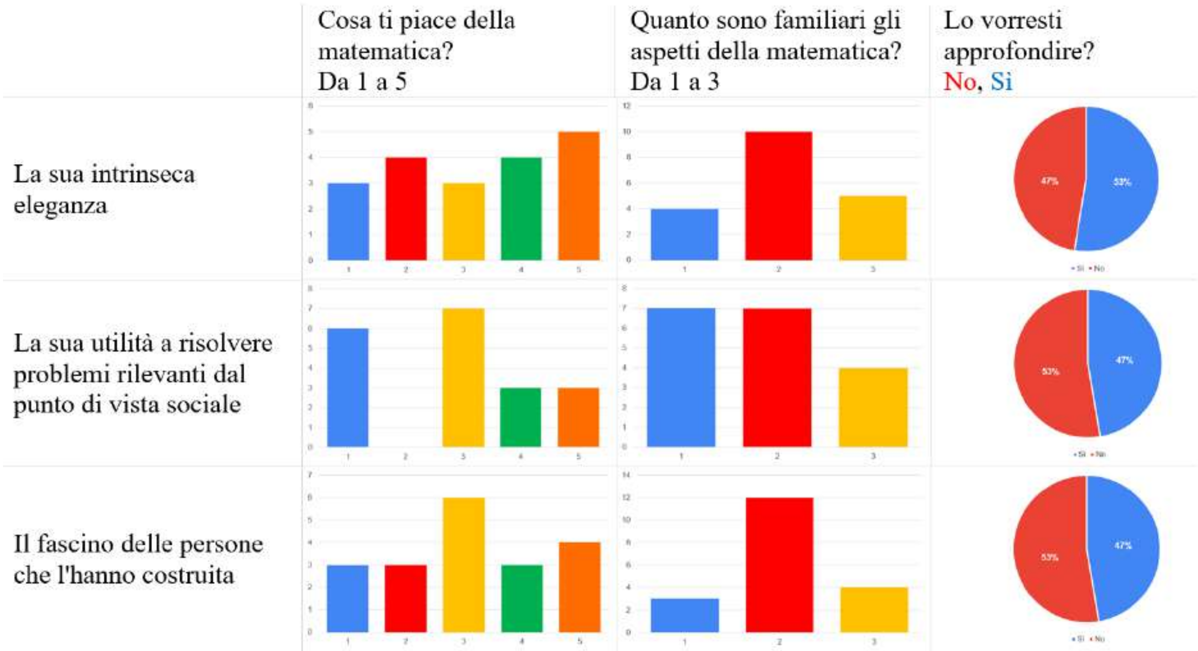

Fig. 3.4: Pattern 3 (matematica) – Aspetti poco familiari

Il terzo *pattern* raggruppa gli aspetti meno familiari agli studenti. Il fatto che risultino poco familiari il “fascino delle persone che l’hanno costruita” e “l’eleganza” sembra indicare come la matematica che conoscono sia poco legata alla sua evoluzione storica e al contesto sociale, culturale, sociale e intellettuale in cui si è sviluppata. Aspetto interessante, in quanto discordante nel confronto con il primo *pattern*, è il fatto che non sia riconosciuta l’utilità della matematica e nel risolvere problemi rilevanti dal punto di vista sociale. Una considerazione che potremmo avanzare è che nel contesto scolastico la disciplina matematica non comunichi attivamente con gli aspetti sociali che possono essere presentati e analizzati, o che questi non vengano affrontati affatto.

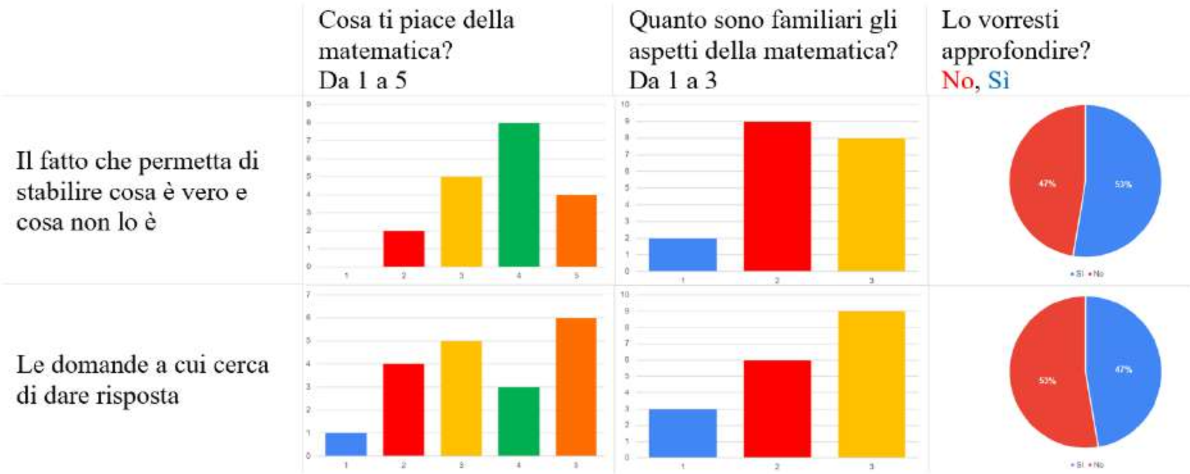

Fig. 3.5: Pattern 4 (matematica) – Gli aspetti familiari che piacciono di più

L'ultima struttura individuata è caratterizzata dal fatto che gli aspetti in questione piacciano e siano familiari. Della matematica piace la certezza, l'obiettività, il fatto che si cerchi di dare risposte esatte alle domande, e questi aspetti sembrano nell'immaginario collettivo propri della matematica.

Un ulteriore aspetto della matematica che alcuni studenti hanno condiviso nelle domande aperte è la sua capacità di generalizzazione, ovvero l'idea che la matematica permetta di risolvere in diversi modi lo stesso problema. Uno studente scrive "*Un aspetto della matematica non scritto sopra che mi piace può essere che dà l'opportunità di giungere a risultati uguali con ragionamenti e strade diverse, arrivando alla stessa meta percorrendo sentieri differenti*". Un altro sostiene che la matematica permette di "*connettere contemporaneamente gli aspetti della materia e giungere, anche in modi differenti, ad una stessa soluzione (ritengo ciò particolarmente interessante perché ci permette di ragionare e non seguire per forza uno schema predefinito, dando quindi sfogo alla nostra immaginazione).*"

Passando all'analisi dei dati che riguardano la fisica, si nota, fin da una prima analisi, una grande differenza con la matematica: molti aspetti hanno lo stesso profilo, caratterizzato da una distribuzione equilibrata delle preferenze centrata sull'opzione neutra "3", un senso di familiarità ma anche un desiderio di maggior approfondimento (Fig, 3.6). Potremmo attribuire questa tendenza, considerando anche le risposte alle domande aperte dei ragazzi, ad una sensazione diffusa di prudenza e di consapevolezza che ancora non si sono formati una forte immagine di fisica. A differenza della matematica, però, sembra esserci una percezione maggiore di una disciplina che evolve nel tempo e che è alla frontiera della ricerca, svolgendo un contributo importante per il progresso inteso come nuove tecnologie, e non solo utile a fornire una struttura ad altre discipline come accadeva per matematica. Questi due aspetti sembrano generare curiosità tra gli studenti, che vedono la fisica come un motore per produrre nuova conoscenza: "la curiosità, questo bisogno insaziabile di conoscenze" (Étienne Bonnot de Condillac). In questo caso emerge una versatilità della disciplina che consiste nel fornire teorie per comprendere in modo diretto la realtà, mentre quella di matematica risiedeva in un livello più strutturale.

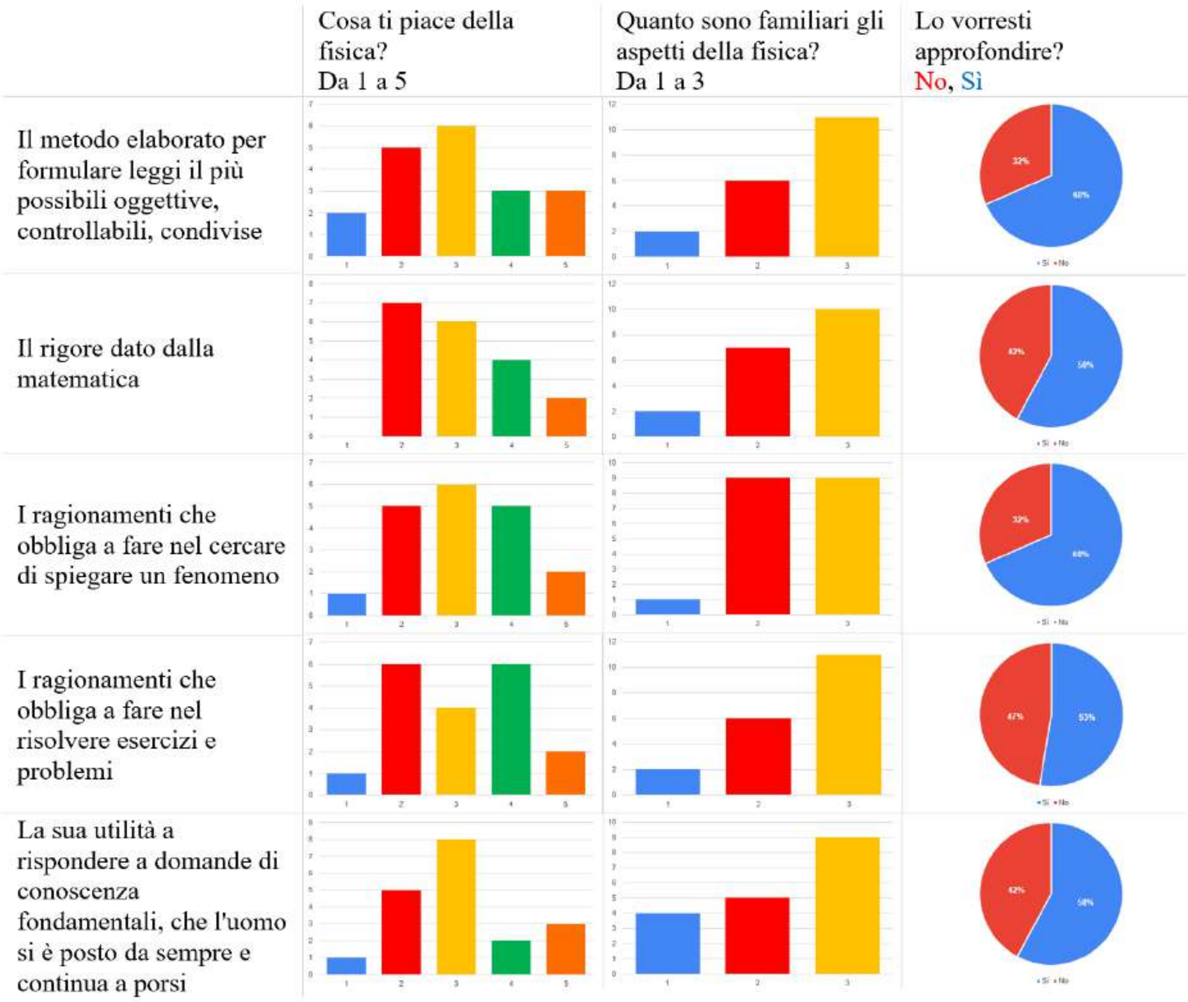

Fig. 3.6: Pattern 1 (fisica) – Aspetti sui quali l'interesse sembra essere distribuito in modo "normale", appaiono familiari e meriterebbero un approfondimento

Il primo *pattern* è considerabile lo specchio di come viene percepita la fisica a scuola (Fig. 3.6). Infatti, oltre al fatto che non si polarizzi il voto che determina quanto piace l'aspetto in questione, risultano familiari i concetti di metodo per formulare leggi oggettive, il rigore dato dalla matematica e i ragionamenti per la risoluzione di esercizi e dimostrazioni; è familiare inoltre l'utilità della fisica a rispondere a domande di conoscenza fondamentali.

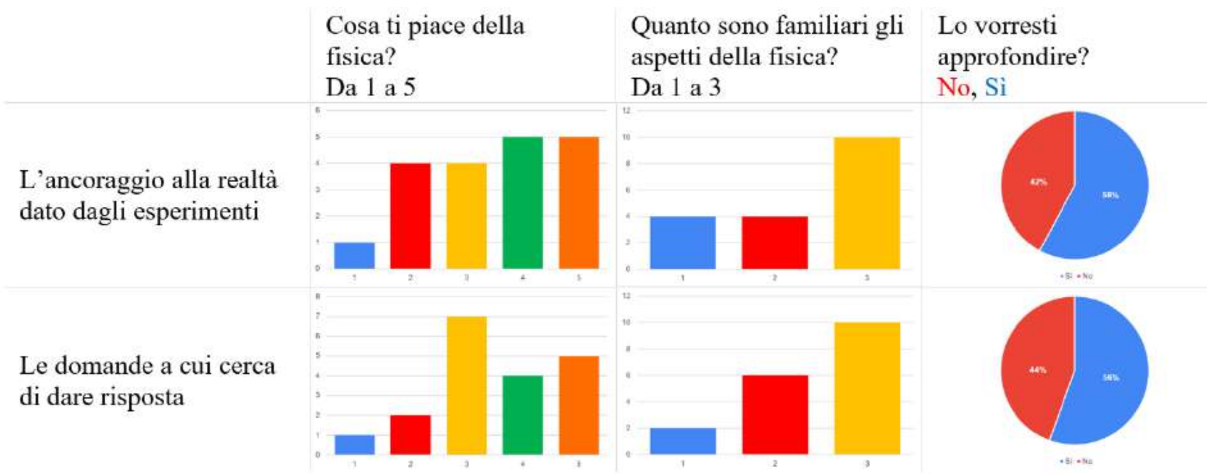

Fig. 3.7: Pattern 2 (fisica) – Aspetti che piacciono, sono familiari ma non meritano approfondimento

Il *pattern* 2 (cfr.3.7) è composto dagli aspetti della fisica che piacciono di più e al tempo stesso sono familiari. Quello che emerge è che agli studenti piace indagare la natura tramite la fisica per il suo metodo, che grazie agli esperimenti permette un ancoraggio alla realtà.

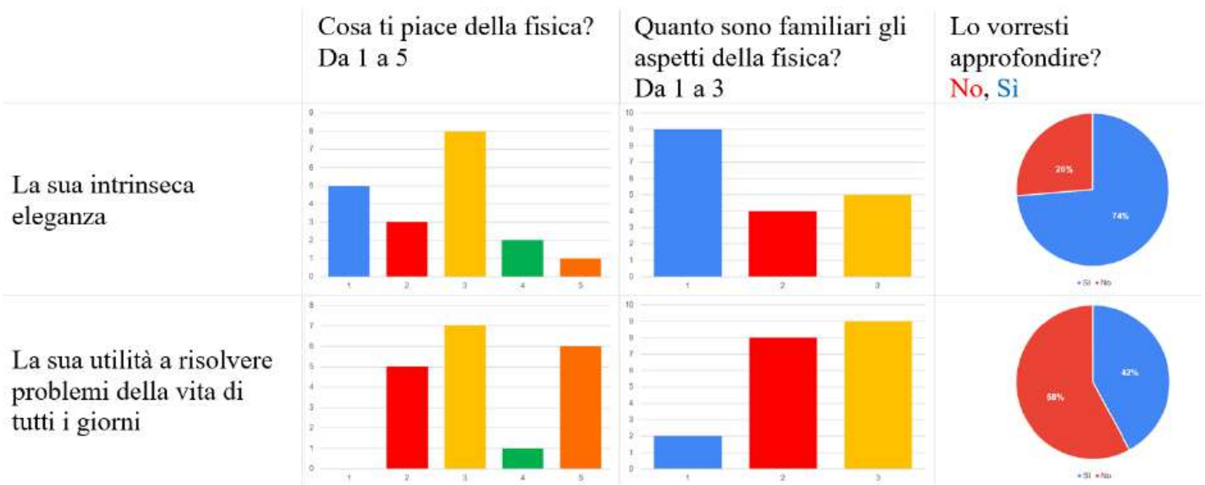

Fig. 3.8: Pattern 3 (fisica) – Aspetti con profili diametralmente opposti

In Fig. 3.8 sono riportati due aspetti che presentano andamenti diametralmente opposti. Per l'eleganza della fisica si osserva che, nonostante venga espresso che non piaccia e che non sia un tema familiare, risulta l'aspetto che più di ogni altro incuriosisce e vorrebbero approfondire. Andamento opposto per quanto riguarda l'utilità della fisica nel risolvere problemi della vita di tutti i giorni, in quanto, nonostante piaccia e sia un aspetto familiare è l'unico, tra quelli proposti, che non desta il desiderio di un approfondimento.

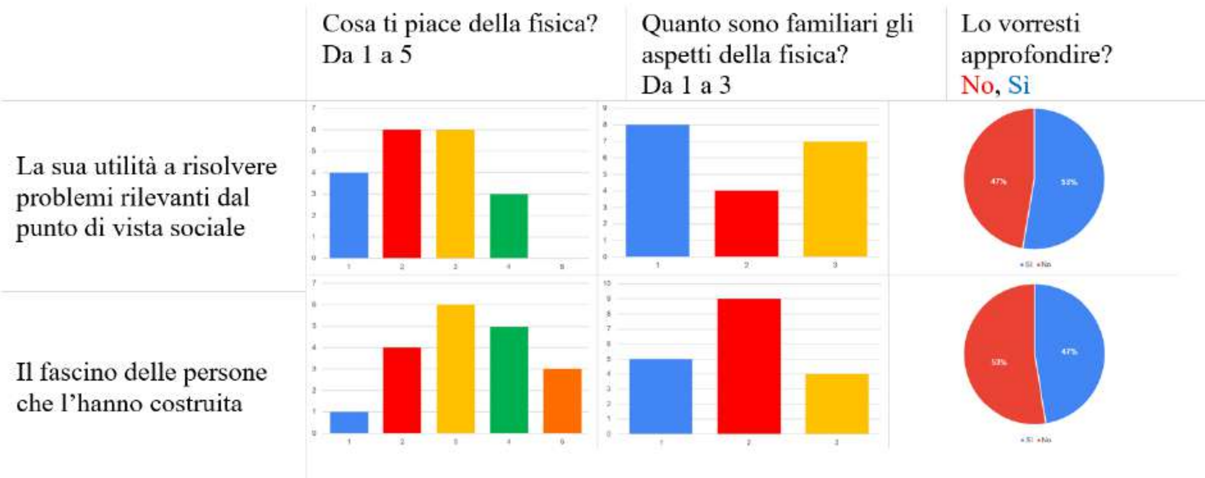

Fig. 3.9: Pattern 4 (fisica) – Aspetti non ritenuti particolarmente interessanti

In fig.3.9 sono riportati casi che non presentano un andamento analogo a nessuno dei precedenti, non presentando aspetti polarizzati da poter fornire una analisi significativa. Non si tratta di aspetti familiari ma che non destano particolare curiosità. Possiamo comunque fare una considerazione a riguardo, se confrontiamo questi risultati con la matematica: "la sua utilità nel risolvere problemi rilevanti dal punto di vista sociale" sembrerebbe un aspetto non troppo chiaro agli studenti, così come mostra la stessa domanda per quanto riguarda la matematica. Questo rimarca la questione di un possibile scollamento tra quel che viene insegnato a scuola e la parte sociale, per esempio rappresentabile da un argomento come il clima e il fenomeno di surriscaldamento o anche altri.

La terza parte, composta da domande a risposta aperta, è dedicata principalmente ad indagare come viene concepita dagli studenti l'interdisciplinarità e raccogliere le reazioni alle lezioni del professor V. Fiumana e alla lezione della professoressa P. Fantini. La base empirica delle considerazioni che emergono sono le risposte degli studenti, riportate lungo la trattazione a supporto di quanto si afferma. Da quanto scritto dai ragazzi sembrerebbero delinearsi tre concezioni dell'intreccio tra matematica e fisica:

1. Rapporto di "complementarità" - rientrano in questa concezione le risposte che sottolineano il ruolo strumentale della matematica e/o di completamento della fisica e viceversa. In particolare, dalle risposte aperte emerge che uno studente esplicitamente sostiene che la matematica sia uno strumento per/della fisica: "*la matematica serve per*

capire meglio la fisica". Due studenti, invece, vedono la fisica come un contesto di applicazione delle leggi della matematica: "*le teorie matematiche della parabola vengono applicate nella fisica con il moto del proiettile*", "*le formule che si usano in fisica derivano da calcoli e leggi matematiche".* Uno studente invece, senza sbilanciarsi, percepisce un legame tra le due discipline, si completano ma non si intrecciano: "*I ragionamenti di matematica completano quelli di fisica e viceversa*".

A questa concezione associamo anche gli anche i commenti di un ragazzo che definisce "fraintendimento" il ridurre la matematica a mero strumento di calcolo: "*Gli aspetti che non mi piacciono sono il poter anche solo pensare di ridurre la matematica a un semplice "fare calcoli" fini a se stessi*".

2. Rapporto di "coesistenza". Il significato di questo termine è utilizzato nell'accezione di simbiosi, la naturale necessità l'una dell'altra. Uno studente sostiene infatti "*Credo che siano due materie che dovrebbero essere strettamente legate tra loro, poiché senza la matematica la fisica non esisterebbe, ma senza la fisica la matematica resterebbe un concetto troppo teoretico (astratto)".* Una risposta che abbiamo trovato particolarmente rappresentativa di questa interpretazione è: "*La relazione tra matematica e fisica secondo me è simile a quella fra anima e corpo e cioè spiegabile dicendo che la fisica si serve della matematica per spiegare fenomeni presenti in natura (quindi è il corpo) e la matematica rappresenta il cardine fondamentale della natura e dell'universo ed è essenziale per poter capire e comprendere i fenomeni della natura (anima)*."
3. Rapporto come "legame": rappresenta una definizione più generica di interdisciplinarità. Comprende le risposte degli studenti che non hanno preso una posizione marcata, ma che hanno riconosciuto un rapporto tra le due discipline che permette un miglioramento delle stesse. Per uno degli studenti per esempio il rapporto tra matematica e fisica: "*vuol dire applicare i problemi della matematica a quelli della fisica stabilendo un collegamento*". Un altro studente invece sostiene che la relazione matematica-fisica sia "*una relazione fondamentale, forse la più importante per comprendere la realtà che ci circonda*", riferendosi, forse, alle domande di conoscenza fondamentali che l'uomo si è posto da sempre e continua a porsi a cui non è possibile dare risposta senza considerare lo stretto intreccio.

Da altre risposte emerge quanto la lezione interdisciplinare della professoressa Fantini, presentata mediante l'approccio storico epistemologico, abbia ricoperto un ruolo di rilievo nel fare riflettere sulla disciplina fisica. In particolare ha colpito i ragazzi lo scoprire che la fisica sia il frutto di una complessa rete evolutiva storico sociale e che la nascita della fisica sia stata una conquista culturale relativamente recente e che ha visto la parabola protagonista. Questo si evince, ad esempio, dalla risposta di uno studente, che ricomprende molti altri aspetti colti dai compagni, alla richiesta di riportare gli elementi circa l'intreccio tra matematica e fisica messi in luce dalla professoressa Fantini e l'eventuale loro novità: *"Innanzitutto ho capito che la parabola è stata la chiave della nascita della fisica moderna, che nel XVI secolo iniziò a slegarsi dalla fisica Aristotelica. Inoltre ho anche compreso come lo studio della parabola abbia dato agli studiosi lo stimolo giusto per creare il metodo scientifico, fondamentale per muoversi correttamente in ogni tipo di scienza*". Diversi studenti hanno anche mostrato grande interesse per l'analisi dei testi originali, sottolineando come proprio questo tipo di attività li abbia aiutati a cogliere l'intreccio: *"ho colto l'intreccio tra matematica e fisica quando la professoressa ha parlato dell'esperimento di Guidobaldo e Galileo, in cui si cerca di dare l'interpretazione matematica al moto di un proiettile, e del "Modo veramente meraviglioso di disegnare la parabola", tratto da "Discorsi e dimostrazioni matematiche" di Galileo".*

Secondo quanto afferma Tzanakis: "porre l'accento sull'integrazione delle questioni storiche ed epistemologiche nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica e la fisica costituisce un possibile modo naturale per esporli." (Tzanakis, 2016). Questo "modo naturale" di esporre ha portato gli studenti ad essere incuriositi da aspetti sui quali non si erano interrogati: "*Mi piacerebbe approfondire le personalità che hanno creato la fisica*"; "*È importante conoscere le persone che hanno portato la matematica al livello attuale*"; "*In particolare mi piacerebbe approfondire e conoscere il fascino delle persone che l'hanno costruita, capire i ragionamenti che hanno fatto per giungere alle loro scoperte.*" Ad ulteriore conferma di ciò sempre Tzanakis sottolinea come questo "modo naturale" aiuti a comprendere che le discipline "hanno subito cambiamenti nel tempo a seguito del contributo di molte culture diverse, in un dialogo ininterrotto con altre discipline scientifiche, filosofia, arti e tecnologia; una forza costante per stimolare e sostenere lo sviluppo scientifico, tecnico, artistico e sociale." (Tzanakis, 2016).

Alla domanda di valutare l'utilità e produttività dell'aver affrontato argomenti di fisica, tra i quali il moto del proiettile, durante la trattazione in classe della parabola in matematica, la risposta degli studenti è stata estremamente positiva, affermando che: "*è stato utile per capire l'argomento a fondo*" e ancora: "*sì, perché permette di allargare i propri orizzonti conoscitivi*".

Per concludere possiamo affermare che gli studenti hanno mostrato interesse all'evoluzione di carattere interdisciplinare che ha portato alla nascita delle discipline, mostrate così come interdisciplinari per natura, superando la concezione di disciplina come contenitore di “prodotti raffinati”, ovvero il frutto della ricerca, e scartare il resto: “sebbene i “prodotti raffinati” di entrambe le discipline facciano parte di questa conoscenza che viene comunicata e criticata e costituisca la base per un nuovo lavoro, didatticamente i processi che producono questa conoscenza sono ugualmente importanti.” (Tzanakis, 2016).

Il commento conclusivo espresso liberamente dagli studenti fa emergere come questa esperienza sia stata didatticamente significativa per loro: “*penso solamente che questo progetto sia stato molto importante e formativo per tutti noi*”; “*Intrecci di questo genere dovrebbero essere trattati in più materie*” e ancora: “*dovrebbero essere organizzate più lezioni del genere a scuola, perché è interessante vedere come le varie materie che studiamo possano essere tra loro collegate*”. Da questi ultimi commenti si evince la volontà degli studenti di poter continuare un percorso interdisciplinare all’interno del contesto scolastico, ampliando gli orizzonti degli intrecci verso altre discipline.

Conclusioni

In questa tesi è stata presentata un'indagine sul tema dell'interdisciplinarità tra matematica e fisica nel caso specifico della parabola. La ricerca fa riferimento al corso PLS per docenti in servizio, durante il quale la parabola è stata analizzata come tema fortemente interdisciplinare tra matematica e fisica, ma anche come sorgente di possibili collegamenti con discipline umanistiche quali storia, linguistica e filosofia.

L'indagine, successivamente alla partecipazione in prima persona in qualità di osservatore al corso, si è sviluppata in classe, nella terza Liceo scientifico del professor V. Fiumana. Le lezioni di matematica sulla parabola sono state integrate dal Professore con argomenti di fisica, in particolare è stato affrontato il moto del proiettile. Al termine delle lezioni è intervenuta la professoressa P. Fantini, che ha portato in classe una lezione sulla parabola dal forte carattere interdisciplinare utilizzando un approccio di tipo storico epistemologico. Infine sono state rilevate le reazioni degli studenti tramite un questionario.

L'indagine è stata guidata dalla domanda di ricerca: come reagisce una classe di Liceo all'approccio storico-epistemologico all'interdisciplinarità tra matematica e fisica che si sta sviluppando a Bologna nell'ambito del progetto IDENTITIES?

I dati relativi ai questionari sono stati analizzati tramite un processo di triangolazione ed è stato possibile trarre delle conclusioni grazie una operazione di *bottom-up*.

Tra i risultati principali dell'analisi si trova la concezione che hanno gli studenti delle discipline viste come "prodotti raffinati" (Tzanakis, 2016) fatti e finiti, che sono sempre esistiti; sembra poco contemplata la possibilità che siano il risultato di una evoluzione storica, frutto di una profonda elaborazione intellettuale collocata culturalmente e socialmente. L'approccio proposto ha mostrato come la conoscenza nasca in un contesto intrinsecamente interdisciplinare e solo a posteriori sia stata organizzata per formare le discipline. L'analisi storica ed epistemologica del caso della parabola ha dunque permesso anche di mettere in evidenza l'autenticità della conoscenza nel suo sviluppo storico e ha messo in luce l'identità delle discipline. Tramite queste lezioni interdisciplinari è stato possibile guidare gli studenti a riflettere sull'idea stessa di disciplina. È emerso particolare interesse per l'approccio utilizzato, evidenziato dai commenti che, oltre a rimarcare l'entusiasmo degli studenti a riguardo, hanno avanzato la richiesta di poter trattare in maniera interdisciplinare anche le altre discipline scolastiche. Rispondendo alla domanda di indagine che ha guidato questo elaborato, concludo affermando che essendo stata più che positiva la reazione dei ragazzi di terza Liceo scientifico ad una trattazione interdisciplinare di carattere storico epistemologico, la strada intrapresa dal progetto IDENTITIES possa essere una strada percorribile, che potrebbe riuscire nell'intento di ampliare la conoscenza delle discipline tramite un modello di insegnamento interdisciplinare.

Appendice I: protocollo di intervista

1) Interdisciplinarità, come la definirebbe in rapporto alle discipline matematica e fisica?

2) Riconosce un potenziale nell'insegnamento delle discipline tramite interdisciplinarità? Come e in quali argomenti specifici utilizzerebbe un approccio interdisciplinare?

3) Quale obiettivo si pone intraprendendo, a suo modo, un percorso interdisciplinare?

4) Quali sono i termini chiave, in ambito di interdisciplinarità tra matematica e fisica, prendendo come argomento la parabola?

5) Quali competenze pensa siano necessarie per poter affrontare la parabola in termini interdisciplinari?

6) Come si struttureranno le lezioni/interrogazioni sulla parabola? Ci sarà una domanda che guiderà il corso? Quali strumenti utilizzerà? La parte interdisciplinare avrà un suo tempo dedicato aggiuntivo al normale svolgimento delle lezioni?

Appendice II: protocollo questionario

	Voto
Ti piace la matematica? (da 1 per niente a 10 moltissimo)	
Ti piace la fisica? (da 1 per niente a 10 moltissimo)	

Cosa ti piace della matematica? Per ogni aspetto sottoelencato, indica se ti piace in una scala da 1 (per niente) a 5 (moltissimo)	**Voto**
Il suo rigore	
Il suo livello di astrazione	
Il fatto che permetta di stabilire cosa è vero e cosa non lo è	
I ragionamenti che obbliga a fare nelle dimostrazioni	
I ragionamenti che obbliga a fare nel risolvere esercizi e problemi	
La sua intrinseca eleganza	
La sua utilità a risolvere problemi della vita di tutti i giorni	
La sua utilità a risolvere problemi rilevanti dal punto di vista sociale	
La sua utilità a rispondere a domande di conoscenza fondamentali, che l'uomo si è posto da sempre e continua a porsi	
Il ruolo che svolge nel dare rigore e offrire strumenti di pensiero per altre discipline (fisica, informatica, ingegneria, economia…)	
Le domande a cui cerca di dare risposta	
Il fascino delle persone che l'hanno costruita	

Ci sono altri aspetti della matematica, non elencati sopra, che ti piacciono? Se sì, quali?

____

Puoi spiegare, in poche righe, le tue risposte, illustrando più estesamente cosa ti piace della matematica e cosa non ti piace?

____

Quanto ti sono familiari gli aspetti della matematica elencati di sopra e riportati anche qui per comodità? 1 - Non ho proprio idea di che cosa si intenda; 2 - Ho una vaga idea di che cosa si intenda ma non ne sono sicura/o; 3 - Mi è chiaro cosa si intenda	**Voto**
Il suo rigore	
Il suo livello di astrazione	
Il fatto che permetta di stabilire cosa è vero e cosa non lo è	
I ragionamenti che obbliga a fare nelle dimostrazioni	
I ragionamenti che obbliga a fare nel risolvere esercizi e problemi	
La sua intrinseca eleganza	
La sua utilità a risolvere problemi della vita di tutti i giorni	
La sua utilità a risolvere problemi rilevanti dal punto di vista sociale	
La sua utilità a rispondere a domande di conoscenza fondamentali, che l'uomo si è posto da sempre e continua a porsi	
Il ruolo che svolge nel dare rigore e offrire strumenti di pensiero per altre discipline (fisica, informatica, ingegneria, economia…)	

Le domande a cui cerca di dare risposta	
Il fascino delle persone che l’hanno costruita	

Quali aspetti della matematica, tra quello elencati di sopra e riportati qui, ti incuriosiscono e vorresti approfondire? 1 - sì, mi piacerebbe approfondirli; 2 - no, non mi incuriosiscono.

	Voto
Il suo rigore	
Il suo livello di astrazione	
Il fatto che permetta di stabilire cosa è vero e cosa non lo è	
I ragionamenti che obbliga a fare nelle dimostrazioni	
I ragionamenti che obbliga a fare nel risolvere esercizi e problemi	
La sua intrinseca eleganza	
La sua utilità a risolvere problemi della vita di tutti i giorni	
La sua utilità a risolvere problemi rilevanti dal punto di vista sociale	
La sua utilità a rispondere a domande di conoscenza fondamentali, che l'uomo si è posto da sempre e continua a porsi	
Il ruolo che svolge nel dare rigore e offrire strumenti di pensiero per altre discipline (fisica, informatica, ingegneria, economia…)	
Le domande a cui cerca di dare risposta	
Il fascino delle persone che l’hanno costruita	

Puoi commentare e spiegare, in poche righe, le tue risposte ai quesiti precedenti in modo da aiutarci a capire cosa ti piacerebbe studiare, conoscere o approfondire?

____

Cosa ti piace della fisica? Per ogni aspetto sottoelencato, indica se è un aspetto che ti piace in una scala da 1 (per niente) a 5 (moltissimo).

	Voto
Il metodo elaborato per formulare leggi il più possibili oggettive, controllabili, condivise	
Il rigore dato dalla matematica	
L’ancoraggio alla realtà dato dagli esperimenti	
I ragionamenti che obbliga a fare nel cercare di spiegare un fenomeno	
I ragionamenti che obbliga a fare nel risolvere esercizi e problemi	
La sua intrinseca eleganza	
La sua utilità a risolvere problemi della vita di tutti i giorni	
La sua utilità a risolvere problemi rilevanti dal punto di vista sociale	
La sua utilità a rispondere a domande di conoscenza fondamentali, che l'uomo si è posto da sempre e continua a porsi	
Le domande a cui cerca di dare risposta	
Il fascino delle persone che l’hanno costruita	

Ci sono altri aspetti della fisica, non elencati sopra, che ti piacciono? Se sì, quali?

____

Puoi spiegare, in poche righe, le tue risposte, illustrando più estesamente cosa ti piace della fisica e cosa non ti piace?

Quanto ti sono familiari gli aspetti della fisica elencati di sopra e riportati anche qui per comodità? 1 - Non ho proprio idea di che cosa si intenda; 2 - Ho una vaga idea di che cosa si intenda ma non ne sono sicura/o; 3 - Mi è chiaro cosa si intenda

	Voto
Il metodo elaborato per formulare leggi il più possibili oggettive, controllabili, condivise	
Il rigore dato dalla matematica	
L'ancoraggio alla realtà dato dagli esperimenti	
I ragionamenti che obbliga a fare nel cercare di spiegare un fenomeno	
I ragionamenti che obbliga a fare nel risolvere esercizi e problemi	
La sua intrinseca eleganza	
La sua utilità a risolvere problemi della vita di tutti i giorni	
La sua utilità a risolvere problemi rilevanti dal punto di vista sociale	
La sua utilità a rispondere a domande di conoscenza fondamentali, che l'uomo si è posto da sempre e continua a porsi	
Le domande a cui cerca di dare risposta	
Il fascino delle persone che l'hanno costruita	

Quali aspetti della fisica, tra quello elencati di sopra e riportati qui, ti incuriosiscono e vorresti approfondire? 1 - sì, mi piacerebbe approfondirli; 2 - no, non mi incuriosiscono.

	Voto
Il metodo elaborato per formulare leggi il più possibili oggettive, controllabili, condivise	
Il rigore dato dalla matematica	
L'ancoraggio alla realtà dato dagli esperimenti	
I ragionamenti che obbliga a fare nel cercare di spiegare un fenomeno	
I ragionamenti che obbliga a fare nel risolvere esercizi e problemi	
La sua intrinseca eleganza	
La sua utilità a risolvere problemi della vita di tutti i giorni	
La sua utilità a risolvere problemi rilevanti dal punto di vista sociale	
La sua utilità a rispondere a domande di conoscenza fondamentali, che l'uomo si è posto da sempre e continua a porsi	
Le domande a cui cerca di dare risposta	
Il fascino delle persone che l'hanno costruita	

Bibliografia

Arnold, V. I. (1998). On teaching mathematics. Russian Mathematical Surveys, 53(1), 229–236.

Bara, B. G. (1990). Scienza cognitiva: Un approccio evolutivo alla simulazione della mente.Torino: Boringhieri.

Bellé R. e Napolitani P. D. Le sezioni coniche dei Greci, PLS – Laboratorio di matematica. (https://web.math.unifi.it/archimede/note_storia/Belle-Napolitani-Coniche.pdf).

Branchetti, L., Cattabriga, A., & Levrini, O. (2019). Interplay between mathematics and physics to catch the nature of a scientific breakthrough: The case of the blackbody. *Physical Review Physics Education Research*, 15(2), 020130.

Brush, S.G. (2015), Mathematics as an instigator of scientific revolutions, *Science & Education*, 24, 495.

Cerreta, P. (2019). Giudobaldo, Galileo e l'esperimento della pallina tinta d'inchiostro, Giornale di fisica, Aprile-Giugno 2019.

Heilbron J. L. (2010). *Galileo. Scienziato e umanista*. Einaudi, Torino.

Kant, Prefazione alla Critica della ragion pura [1787], Laterza, Roma-Bari 2000.

Karam, R. (2015). Introduction of the thematic issue on the interplay of physics and mathematics, *Science & Education*, 24, 487.

Koyré, A. (1939). *Etudes galiliennes*, tr. di Maurizio Torrini, *Studi galileiani*, Einaudi, Torino, 1976.

Kragh, H. (2015). Mathematics and physics: The idea of preestablished harmony, *Science &* Education, 24, 487.

Levrini O., Bertozzi E., Gagliardi M., Grimellini-Tomasini N., Pecori B., Tasquier G., Galili I. (2014). Meeting the discipline-culture framework of physics knowledge: a teaching experience in Italian sec-ondary school, Science & Education, 23, 1701–1731, DOI 10.1007/s11191-014-9692-z.

Marchini C. , Appunti di Geometria classica A.A. 2005-2006, Capitolo V- L'opera di Apollonio di Perge (http://old.unipr.it/arpa/urdidmat/Amici/GeoClassCap5.pdf).

Newton, I (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, British Library (trad. It. *Principî matematici della filosofia naturale*, UTET, 1965).

Ovidio, libro X delle Metamorfosi ed. UTED a cura di Nino Scivoletto, 2009.

Pellerey, M., Le competenze individuali e il portfolio, Roma, La Nuova Italia, 2004.

Rossi, P. (1975). Pensieri e conclusioni sulla interpretazione della natura o sulla scienza operativa (1607-1609), in Scritti filosofici, a cura di Paolo Rossi, UTET, Torino, 1975, p. 389.

Tzanakis, C. (2016, July). Mathematics & physics: an innermost relationship. Didactical implications for their teaching & learning.

Tzanakis, C., & Thomaidis, Y. (2000). Integrating the close historical development of mathematics and physics in mathematics education: Some methodological and epistemological remarks. For the Learning of Mathematics, 20(1), 44-55.

Viola T., Il contributo di Keplero alla teoria delle coniche, (http://www.mathesisnazionale.it/mathesisbkp/archivio-storico-articoli-mathesis/68_83.pdf).