IDENTITIES

Enlightening
Interdisciplinarity
in STEM
for Teaching

Ripensare le discipline per un nuovo approccio all'interdisciplinarità tra matematica, fisica e informatica nella scuola secondaria

Laura Branchetti

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union
Grant Agreement n°2019-1-IT02-KA203-063184

DISCIPLINE E SFIDE SOCIALI

Qual è il ruolo delle discipline tradizionali per preparare gli studenti ad affrontare le sfide della società?

Quale spazio dobbiamo riservare al loro insegnamento? Diventano inutili o svolgono ancora un ruolo rilevante?

Né l'approccio disciplinare "tradizionale" alla conoscenza né un approccio a-disciplinare, basato su abilità trasversali, è produttivo per affrontare le sfide della società e i loro problemi autentici

.

DISCIPLINE = MATERIE SCOLASTICHE?

le materie talvolta, per varie ragioni, non riflettono né la natura dell'attività scientifica contemporanea né la storia della scienza

“l'autenticità disciplinare dovrebbe essere perseguita sviluppando abilità epistemiche "enfatizzando le pratiche di **fare scienza** e generando conoscenza scientifica, mentre altri contesti più orientati alla storia filosofica possono **enfatizzare la riflessione critica sui processi epistemologici e storici dello sviluppo della conoscenza scientifica**".

(Kapon et al., 2018)

FRA “wheel” (Family Resemblance Approach; Erduran & Dagher, 2014)

INTERDISCIPLINARITA'

Frodeman, Klein e Pacheco (2017, p. 16): parliamo di interdisciplinarità quando le discipline si integrano, interagiscono e si fondono reciprocamente; consideriamo invece multidisciplinare un approccio in cui le discipline sono giustapposte, sequenziali e coordinate, mentre si definisce transdisciplinare un approccio che va “oltre alle discipline”, portando a nuove identità e nuove epistemologie in cui tendono a scomparire le identità disciplinari

“integrano, interagiscono e si fondono reciprocamente”

.

INTERDISCIPLINARITA'

"integrano, interagiscono e si fondono reciprocamente"

.

Akkerman S.F., Bakker A. (2011)
Boundary crossing and boundary objects.
Review of educational research, 81(2), 132-169

Thompson Klein J. (2010)
A taxonomy of interdisciplinarity.
The Oxford handbook of interdisciplinarity, 15, 15-30

Akkerman & Bakker, 2011

Boundary Crossing mechanisms e Boundary Object

Boundary Objects -
An ambiguous nature

Both – and: Oggetti che determinano il confine, indirizzando e articolando significati e prospettive (a più voci) di vari mondi intersecanti.

Neither – nor: oggetti che si muovono oltre il confine in quanto hanno una qualità propria non specificata.

Questa ambiguità crea un bisogno di dialogo, in cui i significati devono essere negoziati e da cui può emergere qualcosa di nuovo → se esplicitato, il carattere ambiguo può fornire opportunità di apprendimento

Akkerman-Bakker “learning mechanisms” per progettare attività interdisciplinari

Nell'attraversare i confini delle discipline, **non è dato per scontato che tali apprendimenti avranno luogo** (**"potenziali di apprendimento"** nel documento Akkerman-Bakker).

Ogni meccanismo di apprendimento ha i propri processi interdisciplinari che devono essere adeguatamente attivati.

Se consideriamo:

- un **argomento interdisciplinare come oggetto di confine tra le discipline**
- un'**attività su quell'argomento come attraversamento di confine**

potrebbe essere essenziale chiedersi **quali potenzialità di apprendimento** sono abilitate.

UN CIRCOLO VIRTUOSO?

Interdisciplinarità ↔ autenticità disciplinare

1. un **approccio interdisciplinare adeguatamente strutturato** potrebbe aiutare a **comprendere meglio le discipline** (es. Radiazioni di corpo nero, parabola)

2. la **conoscenza disciplinare potrebbe aiutare ad apprendere nuove discipline** o ad affrontare **nuovi problemi che non sono ancora organizzati in una disciplina** (es. Intelligenza artificiale)

IDENTITIES
Enlightening Interdisciplinarity in STEM for Teaching

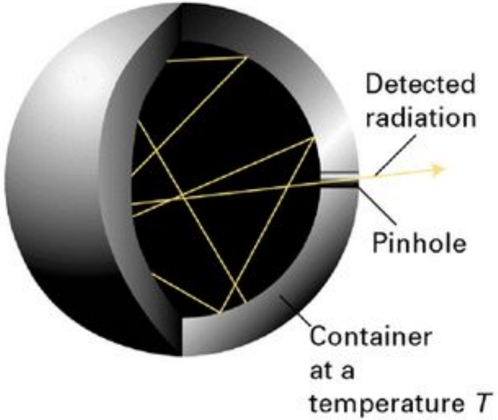
https://iseeproject.eu/

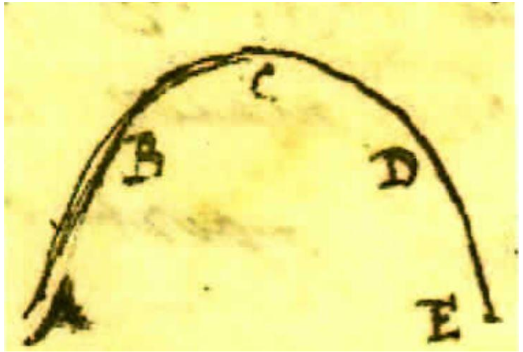
Inclusive STEM Education to Enhance the capacity to aspire and imagine future careers

Struttura dei moduli e schede operative per gli studenti di scuola secondaria di secondo grado
https://iseeproject.eu/wp-content/uploads/2019/08/O3_August-18_DEF.pdf

I SEE
It's your time to imagine the futures

Matematica e Fisica





Quali relazioni tra matematica e fisica?

Karam R. (ed.) (2015). Introduction to the thematic issue on the interplay of physics and mathematics. Special Issue Science & Education.

IL PROBLEMA:

Insegnamento della fisica Matematica un mero strumento per descrivere e calcolare

Insegnamento della matematica Fisica un possibile contesto per l'applicazione di concetti astratti

C'è molto di più… ad esempio:

- la matematica innesca rivoluzioni scientifiche (Brush, 2015)
- fornisce le strutture formali del pensiero (es. Il potere creativo delle analogie formali) (Kragh, 2015)
- si costruisce contestualmente alla fisica (es. calcolo differenziale, le geometrie...)

Alcuni modelli/approcci all'interdisciplinarità in Didattica della Fisica e della Matematica

"What is common for all of them [the models] is the need to have an underlying conceptual position towards the role of mathematics in physics education." (Udhen et al. 2012)

IDENTITIES
Enlightening Interdisciplinarity in **STEM** for Teaching

Tzanakis (2016)

- Un approccio globale denominato *history-pedagogy-mathematics/physics (HPM/Ph)* a finalizzato a sottolineare **l'interdisciplinarità come essenza dell'evoluzione storica delle due discipline**.

- **Casi storici emblematici:** "(a) measuring the distance of inaccessible objects; (b) rotations, space-time and special relativity; (c) differential equations, functional analysis and quantum mechanics"

IDENTITIES

Enlightening Interdisciplinarity in STEM for Teaching

Tzanakis (2016)

Assunto di base dell'approccio HPM/Ph: La "storicità" delle due discipline e la loro co-evoluzione intrecciata e **bi-direzionale**

Dalla matematica alla fisica:

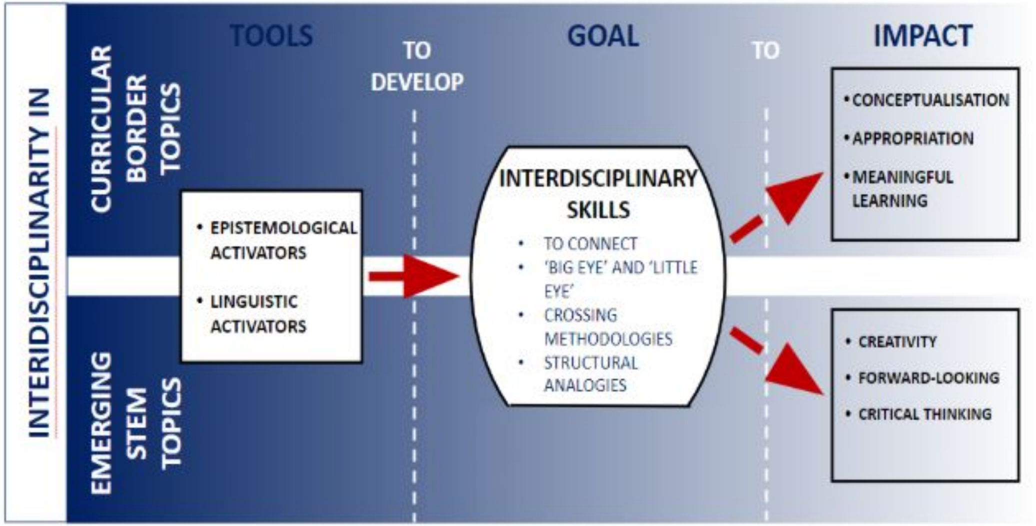
"mathematics is the language of physics, not only as a tool for expressing, handling and developing logically physical concepts, methods and theories, but also as an indispensable, formative characteristic that **shapes** them, by **deepening**, **sharpening**, and **extending** their meaning, or even **endowing** them with meaning".

Dalla fisica alla matematica:

"physics constitutes a (or maybe, the) natural framework for testing, applying and elaborating mathematical theories, methods and concepts, or even **motivating, stimulating, instigating and creating** all kinds of mathematical innovations".

Il moto parabolico: una “matematizzazione” vale l’altra?

Linguistics and epistemology to re-think traditional and new disciplines and cross the borders to realize integration in STEM



Il moto parabolico

Caso storico fondamentale: **la "matematizzazione della fisica" come la intendiamo oggi a scuola nasce in questo periodo**

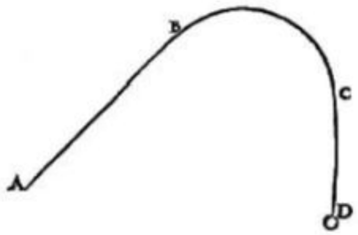
"Con Galileo Galilei nasce una nuova concezione della fisica, dove la matematica gioca un ruolo completamente diverso." **Quale?**

Quale "ruolo strutturale" ha giocato la matematica all'inizio di questa storia**, quale ruolo può ancora giocare oggi nell'insegnamento di questo argomento a scuola?**

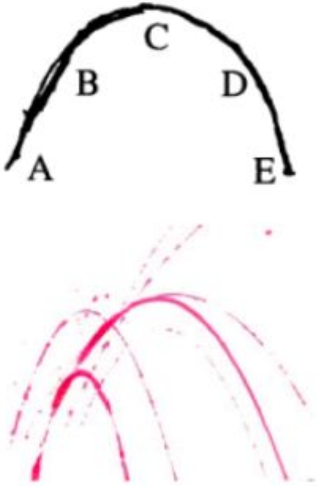
Fonti primarie

- *Sezioni coniche* di Apollonio (e alcuni estratti da Archimede)
- *Elementi di geometria* di Euclide
- Nicole d'Oresme e le "forme del movimento" (diagrammi con latitudine-longitudine, teorema dei valori intermedi) (ca. 1350)
- L'esperimento dell'inchiostro di Guidobaldo (1587-1592 circa);
- *Parapolimena ad Vitellionem* di Keplero sulle coniche a partire da un'analogia tra riflessione e rifrazione
- *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali* (1638, Galileo), in particolare la definizione di moto uniforme, principi di indipendenza e combinazione, prova della traiettoria parabolica del proiettile

Quali aspetti disciplinari e interdisciplinari?



Tartaglia



Guidobaldo

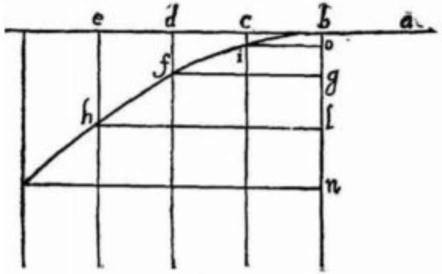


Fig. 108

Galileo

GIORNATA TERZA
DEL MOTO LOCALE

Diamo avvio a una nuovissima scienza intorno a un soggetto antichissimo. Nulla v'è, forse, in natura, di più antico del moto, e su di esso ci sono non pochi volumi, né di piccola mole, scritti dai filosofi; tuttavia tra le sue proprietà ne trova molte che, pur degne di essere conosciute, non sono mai state finora osservate, nonché dimostrate. Se ne rilevano alcune più immediate, come quella, ad esempio, che il moto naturale dei gravi discendenti accelera continuamente; però, secondo quale proporzione tale accelerazione avvenga, non è stato sin qui mostrato: nessuno, che io sappia, infatti, ha dimostrato che un mobile discendente a partire dalla quiete percorre, in tempi eguali, spazi che ritengono tra di loro la medesima proporzione che hanno i numeri impari successivi *ab unitate*. È stato osservato che i corpi lanciati, ovverossia i proietti, descrivono una linea curva di un qualche tipo; però, che essa sia una parabola, nessuno l'ha mostrato. Che sia così, lo dimostrerò insieme ad altre non poche cose, né meno degne di essere conosciute, e, ciò che ritengo ancor più importante, si apriranno le porte a una vastissima e importantissima scienza, della quale queste nostre ricerche costituiranno gli elementi; altri ingegni più acuti del mio ne penetreranno poi più ascosi recessi.

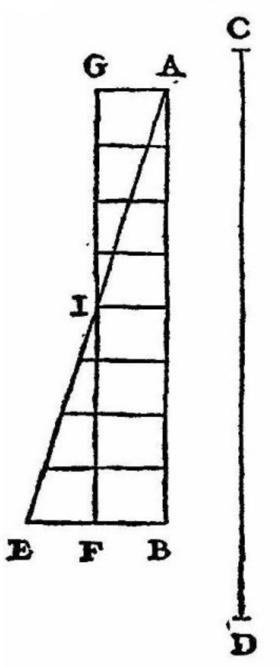
Dividiamo in tre parti la trattazione: nella prima parte consideriamo ciò che concerne il moto equabile o uniforme; nella seconda trattiamo del moto naturalmente accelerato; nella terza, del moto violento, ossia dei proietti.

DEL MOTO EQUABILE

Circa il moto equabile o uniforme, ci occorre una sola definizione, che formulo così:

DEFINIZIONE

Moto eguale o uniforme intendo quello in cui gli spazi percorsi da un mobile in tempi eguali, comunque presi, risultano tra di loro eguali.



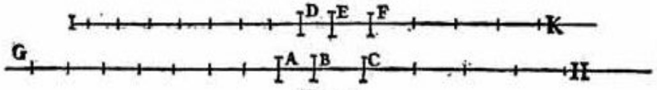


Fig. 40

AVVERTENZA

Ci è parso opportuno aggiungere alla vecchia definizione (che semplicemente parla di moto equabile, allorché in tempi eguali vengono percorsi spazi eguali) l'espressione *comunque presi*, cioè per tutti i tempi che siano eguali: infatti, può accadere che in determinati tempi eguali un mobile percorra spazi eguali, mentre spazi, percorsi in frazioni di tempo minori, sebbene eguali, non siano eguali. Dalla precedente definizione dipendono quattro assiomi, cioè:

ASSIOMA 1

In uno stesso moto equabile, lo spazio percorso in un tempo più lungo è maggiore dello spazio percorso in un tempo più breve.

ASSIOMA 2

In uno stesso moto equabile, il tempo in cui è percorso uno spazio maggiore è più lungo del tempo impiegato a percorrere uno spazio minore.

ASSIOMA 3

Lo spazio, percorso in un dato tempo a velocità maggiore, è maggiore di quello percorso, nello stesso tempo, a velocità minore.

ASSIOMA 4

La velocità, con cui in un dato tempo viene percorso uno spazio maggiore, è maggiore di quella con cui, nello stesso tempo, viene percorso uno spazio minore.

TEOREMA1. PROPOSIZIONE 1

Se un mobile, dotato di moto equabile, percorre due spazi con una stessa velocità, i tempi dei moti staranno tra di loro come gli spazi percorsi.

DEL MOTO DEI PROIETTI

Le proprietà che si presentano nel moto equabile, come pure nel moto naturalmente accelerato su piani di qualsiasi inclinazione, le abbiamo considerate sopra. Nella trattazione, che ora comincio, cercherò di presentare, e di stabilire sulla base di salde dimostrazioni, alcuni fenomeni notevoli e degni di essere conosciuti, che sono propri di un mobile, mentre si muove con moto composto di un duplice movimento, cioè di un movimento equabile e di uno naturalmente accelerato: tale appunto sembra essere quello che chiamiamo moto dei proietti; la generazione del quale così stabilisco.

Immagino di avere un mobile lanciato su un piano orizzontale, rimosso ogni impedimento: già sappiamo, per quello che abbiamo detto più diffusamente altrove, che il suo moto si svolgerà equabile e perpetuo sul medesimo piano, qualora questo si estenda all'infinito; se invece intendiamo [questo piano] limitato e posto in alto, il mobile, che immagino dotato di gravità, giunto all'estremo del piano e continuando la sua corsa, aggiungerà al precedente movimento equabile e indelebile quella propensione all'ingiù dovuta alla propria gravità: ne nasce un moto composto di un moto orizzontale equabile e di un moto *deorsum* naturalmente accelerato, il quale [moto composto] chiamo proiezione. Ne dimostreremo parecchie proprietà: la prima delle quali sia [la seguente].

TEOREMA 1. PROPOSIZIONE 1

Un proietto, mentre si muove di moto composto di un moto orizzontale equabile e di un moto *deorsum* naturalmente accelerato, descrive nel suo movimento una linea semiparabolica.

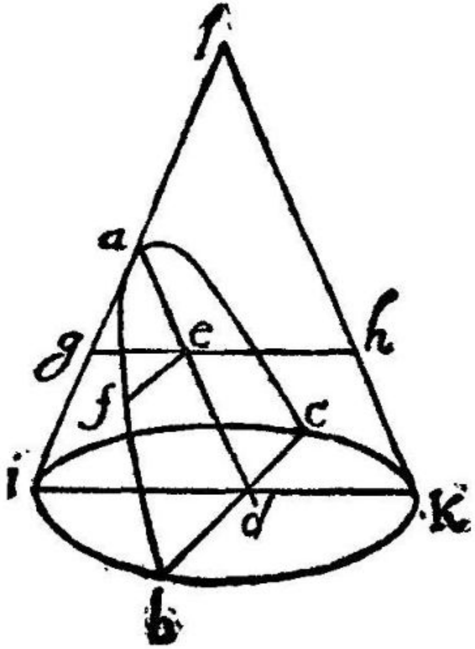


Fig. 106

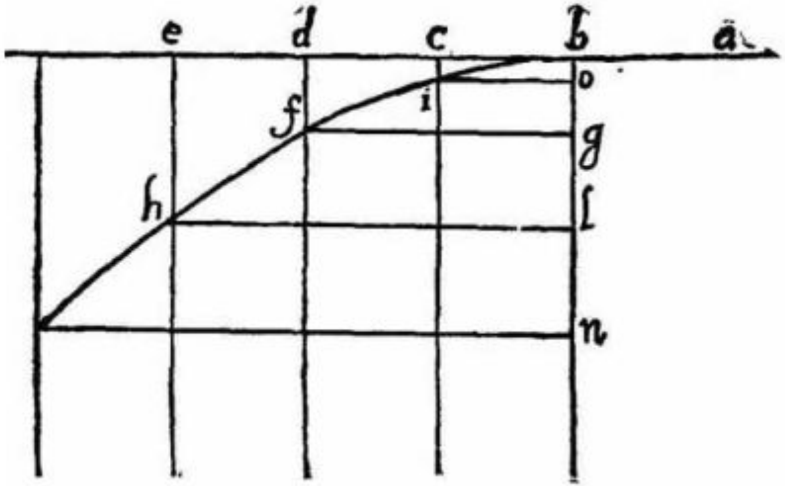


Fig. 108

Quale caratterizzazione/definizione di parabola?

Coniche, proposizione I.11

Dato il cono ABC di vertice A e base BC si consideri un piano secante che generi una sezione il cui diametro PM sia parallelo a uno dei lati del triangolo per l'asse. Sia QV un'ordinata relativa al diametro PM.

Se si traccia una retta PL perpendicolare a PM nel piano della sezione, tale che

$$PL : PA = BC^2 : BA \times AC$$

allora

$$QV^2 = PL \times PV \tag{3}$$

La sezione così ottenuta si chiama parabola *e la retta fissa PL (rispetto alla quale si realizza l'uguaglianza fra il quadrato di una qualsiasi ordinata e il rettangolo costruito sull'ascissa e tale retta fissa) è detta* lato retto *della parabola.*

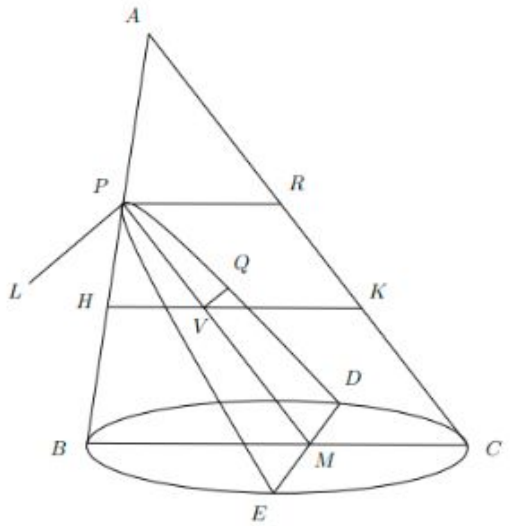


Figura 6: Il sintomo della parabola

La dimostrazione

«Si intenda inoltre che la linea be, la quale prosegue il piano ab per diritto, **rappresenti lo scorrere del tempo, ossia [ne costituisca] la misura,** e su di essa si segnino ad arbitrio un numero qualsiasi di porzioni di tempo eguali, bc, cd, de; inoltre dai punti b, c, d, e si intendano condotte linee equidistanti dalla perpendicolare bn: **sulla prima di esse si prenda una parte qualsiasi ci; sulla [linea] successiva se ne prenda una quattro volte maggiore,** df; [sulla terza,] una nove volte maggiore, eh; e così di séguito sulle altre linee secondo la proporzione dei quadrati delle [porzioni di tempo] cb, db, eb, o vogliam dire in duplicata proporzione delle medesime».

«Se poi intendiamo che al mobile, il quale si muove oltre b verso c con moto equabile, si aggiunga un movimento di discesa perpendicolare secondo la quantità ci, nel tempo bc [esso mobile] si troverà situato nell'estremo i. Ma continuando a muoversi, nel tempo db, cioè [in un tempo] doppio di bc, sarà disceso per uno spazio quattro volte maggiore del primo spazio ci; abbiamo infatti dimostrato nel primo trattato, che **gli spazi percorsi da un grave, con moto naturalmente accelerato, sono in duplicata proporzione dei tempi:** e parimenti, il successivo spazio eh, percorso nel tempo be, sarà nove [volte maggiore del primo spazio]: sì che risulterà manifesto che gli spazi eh, df, ci stanno tra di loro come i quadrati delle linee eb, db, cb. Si conducano ora dai punti i, f, h le rette io, fg, hl, equidistanti dalla medesima eb: le linee hl, fg, io saranno eguali, ad una ad una, alle linee eb, db, cb; e così pure le linee bo, bg, bl saranno eguali alle linee ci, df, eh; **inoltre il quadrato di hl starà al quadrato di fg come la linea lb sta alla bg, e il quadrato di fg starà al quadrato di io come gb sta a bo; dunque, i punti i, f, h si trovano su un unica e medesima linea parabolica.** Similmente si dimostrerà che, **preso un numero qualsiasi di particole di tempo eguali di qualunque grandezza, i punti, che il mobile mosso di un simile moto composto occuperà in quei tempi, si troveranno su una medesima linea parabolica.** È dunque manifesto quello che ci eravamo proposti».

- La **matematizzazione era necessaria a diversi livelli strutturali**: per definire il moto lineare uniforme utilizzando rapporti (la velocità era ancora una qualità di un movimento) che coinvolgevano la rappresentazione geometrica dello spazio e del tempo (Galileo, III giornata) e per dimostrare che la traiettoria era una parabola (IV)
- La **matematizzazione era profondamente intrecciata con i principi**, questi venivano mantenuti coerenti e le decisioni sulla corretta matematizzazione venivano prese di conseguenza.
- La **struttura assiomatica degli Elementi** di Geometria di Euclide è stata riproposta e il fondamento è dato dalla **teoria della proporzionalità di Eudosso**

Attività/riflessioni

Come passare dall'analisi storica alla formazione iniziale e alla didattica nella scuola secondaria?

Come può essere esplorato il caso storico in una prospettiva didattica interdisciplinare?

Analisi linguistica ed epistemologica dei libri di testo

Speranza (1997) (e molti autori che si sono ispirati alle sue riflessioni epistemologiche):

le ricostruzioni dei saperi in prospettiva didattica (trasposizione didattica) risentono notevolmente delle assunzioni, spesso implicite, relative alla natura delle discipline. **Fa dunque la differenza pensare alla matematica e alla fisica come discipline con uno statuto epistemologico proprio, indipendente,** che si sviluppano a partire da problemi interni e che possono essere del tutto giustificate utilizzando logiche interne, oppure come **forme di sapere che hanno relazioni e differenze, profondamente intrecciate, che co-evolvono**

Inquadramento curriculare

Nelle *Indicazioni nazionali per i Licei*:

- nella parte dedicata alla matematica: **relazioni autentiche della matematica con la fisica**

- si specifica anche che **il Seicento è un periodo chiave** per lo sviluppo della scienza moderna e si richiede ai docenti di diverse discipline uno sforzo per affrontarlo in prospettiva interdisciplinare.

- viene data **grande importanza alla contestualizzazione storica**.

Analisi storica interdisciplinare

Fonti storiche: mostrare i saperi nella loro **autenticità** e fornire un'immagine delle reciproche **relazioni tra elementi di conoscenza che oggi sono organizzati nelle discipline** e che, nella loro collocazione moderna (sia in ambito scolastico, che universitario, che di ricerca) **potrebbero risultare sconnessi.**

D'Amore (2012): l'uso della storia nella didattica è strettamente intrecciato con le questioni epistemologiche.

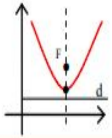
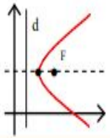
Ci sono **grandi potenzialità** però anche **inevitabili difficoltà nell'uso della storia come strumento didattico**.

Enlightening
Interdisciplinarity
in STEM for Teaching

Quali grafici?

Parabola

Parabola

parabola		
	La parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso F detto fuoco e da una retta data d detta direttrice: $PF = Pd$	
parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y		parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x
$y = ax^2 + bx + c$	equazione completa	$x = ay^2 + by + c$
$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ $\Delta = b^2 - 4ac$	coordinate del **vertice**	$V\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$ $\Delta = b^2 - 4ac$
$F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$	coordinate del **fuoco**	$F\left(\frac{1-\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$
$x = -\frac{b}{2a}$	equazione dell'**asse**	$y = -\frac{b}{2a}$
$y = \frac{-1-\Delta}{4a}$	equazione della **direttrice**	$x = \frac{-1-\Delta}{4a}$

Analisi storica interdisciplinare

Gadamer (1975), D'Amore (2012):

- **contestualizzazione**, secondo cui il sapere viene presentato rispettando la versione originale in termini di criteri di rigore, problemi affrontati, linguaggio, relazione con altri aspetti della conoscenza, secondo gli usi dell'epoca;
- **attualizzazione**, che rivisita i saperi presentati nei testi originali adattandoli al contesto attuale e riformulando con gli strumenti e secondo i criteri di rigore attuali.

Struttura del modulo

0. Attività preliminare e introduzione al progetto

1. «Abitare il confine: un framework per l’interdisciplinarità»

2. Moto parabolico e fondazione della fisica come disciplina

3. Parabola nel lavoro di Galileo e nella storia della Matematica

4. I concetti di simmetria e dimostrazione come “boundary objects”

5. Analisi linguistiche dei testi

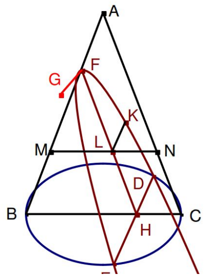
6. Sintesi finale

Parabola nella storia della Matematica e della Fisica

- <u>Contestualizzazione della dimostrazione di Galileo</u> nel framework dell'argomentazione/dimostrazione e dei riferimenti storici alle coniche (Euclide, Apollonio)

- <u>Coniche nella storia della matematica</u> e contributi di studi fisici di Ottica alla loro evoluzione e alla matematica (Keplero, geometria proiettiva)

Due esempi per mostrare il paradigma della co-evoluzione (Tzanakis, 2016)



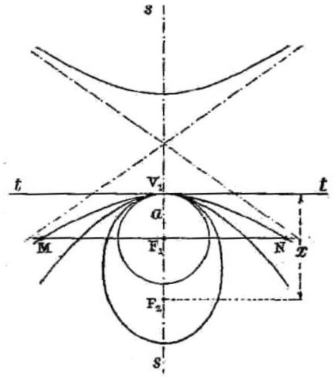


Fig. 1

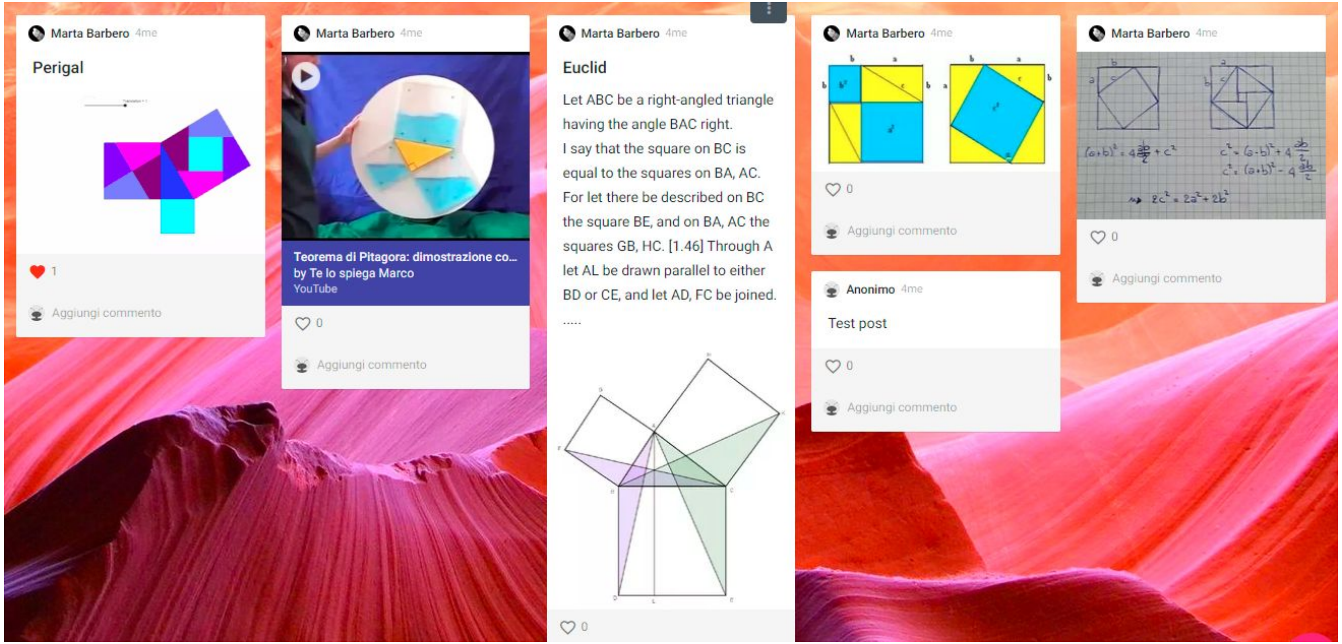
Schvartzer, M., Elazar, M. & Kapon, S. Guiding Physics Teachers by Following in Galileo's Footsteps. *Sci & Educ* 30, 165–179 (2021).

Come rendere la dimostrazione di Galileo un *epistemologically relevant boundary object?*

1. Scrivi una dimostrazione del Teorema di Pitagora
2. Dimostrazione negli Elementi di Euclide e confronto con dimostrazioni algebriche
3. Teoremi come terne (E,T,D) + metateoria
4. Analisi epistemologica della dimostrazione di Galileo e di quelle dei libri di testo

Dimostrazioni del Teorema di Pitagora

Scrivi una dimostrazione del Teorema di Pitagora



Dimostrazioni del Teorema di Pitagora

VIVA LA SCUOLA | SUPERIORI

Come dimostrare il teorema di Pitagora con un semplice disegno

< INDIETRO AVANTI >

1 | 8 **Introduzione**

Il **teorema di Pitagora** è sicuramente uno dei più noti teoremi della geometria, nonché uno dei più utili. Viene infatti utilizzato per risolvere i problemi più basilari così come quelli di grado avanzato. Il suo scopo è quello di fornire la dimostrazione della relazione esistente tra i lati di un **triangolo rettangolo**. Il teorema afferma che la somma delle aree dei quadrati costruiti sui **cateti** equilvale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa. Per essere in grado di dimostrare il teorema di Pitagora con un disegno semplice e chiaro, prosegui nella lettura di questa guida.

Dimostrazioni del Teorema di Pitagora

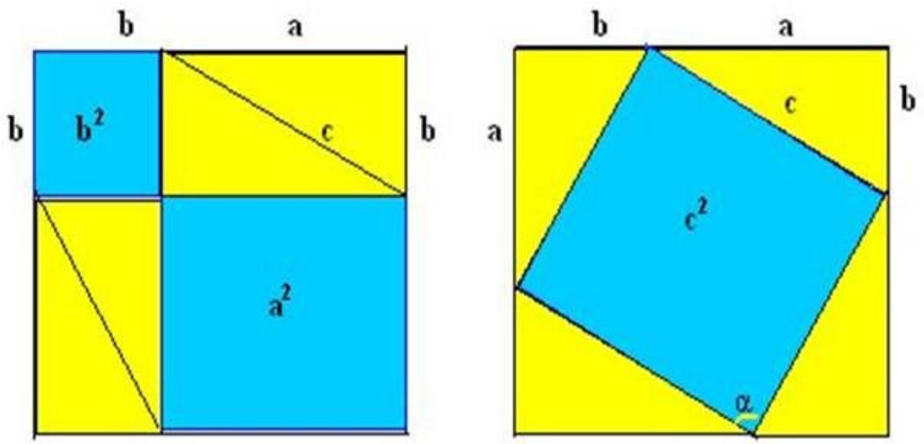
"Dimostrazione" con acqua

https://www.youtube.com/watch?v=tYhQj0PeGHk

Dimostrazione che usa il teorema di Euclide

https://www.youtube.com/watch?v=2JMj9_n8n0M

Dimostrazione coi criteri di congruenza



La dimostrazione (Mariotti, 2000)

Mariotti (2000): un **teorema matematico** è caratterizzato da un enunciato, da una dimostrazione e dal fatto che la relazione tra enunciato e dimostrazione ha senso solo all'interno di un sistema teorico.

enunciato, dimostrazione e teoria di riferimento (E,D,T)

<u>Ruolo fondamentale della teoria:</u> da una parte un teorema ha una precisa collocazione nella costruzione della teoria; dall'altra, la validità di una dimostrazione è relativa a una certa teoria matematica, in altre parole una stessa dimostrazione può essere valida in una teoria e non valida in un'altra.

La dimostrazione (Mariotti, 2000)

T:

Teoria matematica - come la Teoria dei numeri naturali o la Teoria della geometria Euclidea, ecc.

- Meta-teoria, ossia le regole di inferenza che trovano una formalizzazione nella teoria logica delle derivazioni.

Aspetti importanti da considerare:

- la struttura della dimostrazione
- la distinzione tra Teoria e Meta-teoria.

IDENTITIES
Enlightening Interdisciplinarity in **STEM** for Teaching

La spiegazione nelle scienze

In fisica, come in altre discipline scientifiche, la questione è più complessa in quanto si intrecciano principi e derivazioni formali con criteri di aderenza all'osservazione fenomenologica ed empirica e costruzione di modelli, e le forme di spiegazione sono più variegate (Braaten e Windschitl, 2011). Le più rilevanti in ambito scolastico sono:

Covering Law
Statistical-Probabilistic
Causal
Pragmatic
Unification

La dimostrazione: tre diversi obiettivi

- Funzione **argomentativa** (convincere, dare fondamento teorico e struttura rigorosa al ragionamento per persuadere della verità di un asserto)

- Funzione "**relazionale**" in una teoria assiomatica (mostrare da che assunzioni e risultati precedenti dipende un teorema, per capire in che modelli vale; decidere quanto indebolire le assunzioni, se possibile, e cosa assumere - principio euclideo degli assiomi "ragionevoli", "evidenti", diverso da quello moderno)

- Funzione **generativa** di nuovo sapere (esplorazione - congettura - dimostrazione)

Analisi delle spiegazioni di Galileo e dei testi

- Analisi **argomentativa** (quali sono i dati e qual è la conclusione, che cosa si utilizza come garanzia e come fondamento - teoria di riferimento)

- Analisi degli **oggetti** matematici e fisici coinvolti (definizioni, rappresentazioni, ...)

- **Assunzioni e limitazioni** date dall'inquadramento teorico

«Diamo avvio a una nuovissima scienza intorno a un soggetto antichissimo. Nulla v'è, forse, in natura, di più antico del moto, e su di esso ci sono non pochi volumi, né di piccola mole, scritti dai filosofi; tuttavia tra le sue **proprietà** ne trova molte che, pur degne di essere **conosciute**, non sono mai state finora **osservate**, nonché **dimostrate.** Se ne rilevano alcune più immediate, come quella, ad esempio, che il moto naturale dei gravi discendenti accelera continuamente; però, secondo quale proporzione tale accelerazione avvenga, non **è stato sin qui mostrato:** nessuno, che io sappia, infatti, **ha dimostrato** che un mobile discendente a partire dalla quiete percorre, in tempi eguali, spazi che ritengono tra di loro la medesima proporzione che hanno i numeri impari successivi ab unitate. È stato **osservato** che **i corpi lanciati, ovverossia i proietti, descrivono una linea curva di un qualche tipo**; però, che essa sia una parabola, nessuno l'ha mostrato. Che sia così, **lo dimostrerò insieme ad altre non poche cose**, né meno degne di essere conosciute, e, ciò **che ritengo ancor più importante, si apriranno le porte a una vastissima e importantissima scienza, della quale queste nostre ricerche costituiranno gli elementi;** altri ingegni più acuti del mio ne penetreranno poi più ascosi recessi». (Galilei, 1638)

I nodi epistemologici messi in evidenza esplicitamente da Galileo sono numerosi.

- **matematizzazione della fisica:** manifesta tanto negli assiomi iniziali, nei quali si delineano relazioni matematiche tra grandezze fisiche (proporzionalità), quanto nell'impiego di una struttura dimostrativa di impostazione assiomatico-deduttiva. La dimostrazione, quindi, diventa un essenziale meta-oggetto per la fisica.

- **principi di scomposizione/indipendenza dei moti:** proprio durante la dimostrazione, addotta da Salviati nella quarta giornata, il moto del proiettile viene scomposto in moto rettilineo uniforme, nella direzione orizzontale, e moto naturalmente accelerato, nella direzione verticale. È la composizione dei due moti, supposti indipendenti l'uno dall'altro, a far sì che la traiettoria disegnata dal grave sia semi-parabolica.

- **"dualità" curva - traiettoria (boundary object):** la natura come macchina matematica?

1. PARABOLA

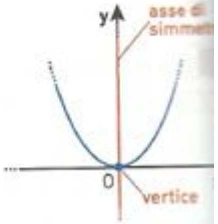
The graph of a quadratic function is a **parabola**.

PARABOLA DI EQUAZIONE $y = ax^2$

Esercizi a pagina 872

Rappresentazione, asse, vertice

Una funzione di proporzionalità quadratica ha espressione analitica $y = ax^2$, con $a \neq 0$. Il suo grafico è una **parabola** che ha l'asse y come **asse di simmetria** e il **vertice** nell'origine degli assi.



ESEMPIO

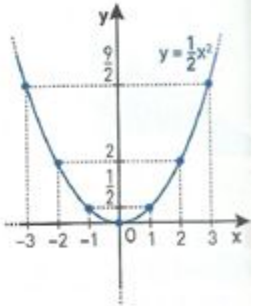
Rappresentiamo il grafico di $y = \frac{1}{2}x^2$ assegnando alcuni valori alla variabile x e calcolando i corrispondenti valori di y.

Se un punto appartiene alla parabola, anche il suo simmetrico rispetto all'asse y è un punto della parabola.

Per esempio, $\left(3; \frac{9}{2}\right)$ e $\left(-3; \frac{9}{2}\right)$ appartengono entrambi alla parabola.

Il vertice $O(0; 0)$ è l'unico punto della parabola che appartiene all'asse di simmetria.

x	y
0	0
± 1	$\frac{1}{2}$
± 2	2
± 3	$\frac{9}{2}$



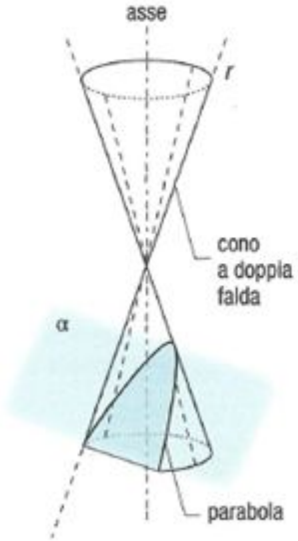


Figura 4.1

Affrontiamo lo studio delle funzioni quadratiche del tipo $y = ax^2 + bx + c$ che danno luogo a parabole.

La parabola è una delle **sezioni coniche** e si ottiene intersecando un cono circolare retto a doppia falda con un piano parallelo a una delle generatrici del cono.
Il primo matematico a comprendere che la parabola, e altre figure chiamate coniche (circonferenza, ellisse, iperbole), potessero essere rappresentate sotto forma di sezioni piane di un cono fu Apollonio di Perga, un matematico greco vissuto nel III secolo a.C. Euclide incluse le coniche negli *Elementi* specificandone le proprietà.
In seguito, nel 1600, Cartesio mise in campo un nuovo approccio allo studio delle coniche basato sul riferimento cartesiano ortogonale: definì ciascuna conica come luogo geometrico e associò a ciascun luogo una equazione caratteristica. In questo modo lo studio delle coniche da problema geometrico si è trasformato in problema algebrico.

DEFINIZIONE

La **parabola** è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto dato, detto **fuoco**, e da una retta data, detta **direttrice**.

In base alla definizione, preso un punto qualsiasi P della parabola, se indichiamo con F un punto fisso chiamato fuoco e con d una retta chiamata direttrice, allora $PF \cong PH$.
Se consideriamo un altro punto qualsiasi, per esempio Q, allora $QF \cong QK$.

Dagli specchi ustori all'antenna radiotelescopica

Una leggenda risalente a Plutarco narra che Archimede nel III secolo avesse incendiato le navi dei Romani che assediavano Siracusa con degli specchi particolari: si trattava di specchi a forma di parabola che riflettevano in un solo punto tutti i raggi del sole ricadenti sulla loro superficie; così facendo si otteneva una temperatura sufficientemente elevata da incendiare il legno con il quale erano costruite le navi romane.

L'idea alla base della costruzione dello specchio ustorio è che nella parabola esiste un punto, detto fuoco, tale che i raggi del sole che provengono dall'infinito (sono delle rette parallele), riflettendosi sulla parabola, finiscono in esso.

I grandi telescopi e le antenne paraboliche con le quali si ricevono le trasmissioni televisive dai satelliti agiscono secondo questo principio: i segnali che giungono sono praticamente paralleli, viste le distanze; rimbalzano sull'antenna e vengono concentrati sul ricevitore, posto nel fuoco, condensando i segnali, altrimenti deboli.

Definizione

Si definisce **parabola** il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da una retta fissa, detta **direttrice** e da un punto fisso detto **fuoco**.

15. Il moto dei corpi lanciati in aria

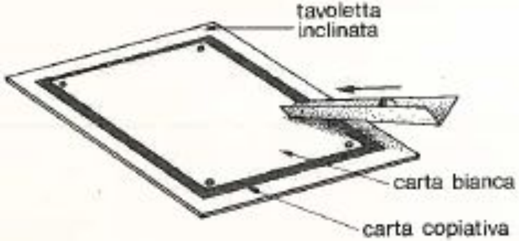
Un corpo lanciato in aria si muove, in generale, lungo una traiettoria curva: la figura 30 è stata copiata da una fotografia multiflash di una palla lanciata in aria in direzione obliqua. Cerchiamo di capire come si svolge il moto facendo alcune misurazioni sulla figura.

Innanzitutto: il moto della palla può essere considerato come se fosse composto dalla *sovrapposizione* di due moti: *un moto verticale* ed *un moto orizzontale*. Disegnando sulla figura con una matita a punta fine un reticolato

Un'ulteriore analisi della traiettoria della palla mostra che la sua forma è parabolica. Questo fatto può essere da te verificato riferendo la curva che rappresenta la traiettoria ad una coppia di coordinate spaziali cartesiane aventi l'origine nel suo punto più alto e l'asse verticale che punta verso il basso, coincidente con l'asse di simmetria della curva. La curva è una parabola se, chiamando x le ascisse (orizzontali) dei punti della traiettoria e y le loro ordinate (verticali), risulta che i valori di y sono direttamente proporzionali ai quadrati dei valori di x.

Traiettorie paraboliche come quella della figura 30 si ottengono ogni volta che un moto uniforme si combina con un moto uniformemente accelerato, ad angolo retto tra loro. Ciò avviene anche quando una biglia rotola obliquamente su un piano inclinato, se l'attrito è trascurabile. Un semplice esperimento ti permetterà di verificare questo fatto.

Registra le traiettorie paraboliche di una sferetta d'acciaio che farai rotolare obliquamente su una tavoletta di legno inclinata, su cui avrai fissato un foglio di carta copiativa con la parte inchiostrata verso l'alto, con sopra un foglio di carta bianca. Puoi lanciare la sferetta sul piano facendola rotolare giù da una guida ottenuta piegando una striscia di cartone nel senso della lunghezza (fig. 31).



Tracciando opportunamente degli assi cartesiani sulle traiettorie registrate, verifica che si tratta di parabole.

Nota. Forse sei curioso di sapere per quale ragione queste traiettorie sono proprio delle parabole. Eccola.

Se ci riferiamo alla palla della figura 30, si trova che essa si sposta orizzontalmente con velocità costante perché la resistenza del mezzo è trascurabile. Chiamiamo questa velocità v_x.

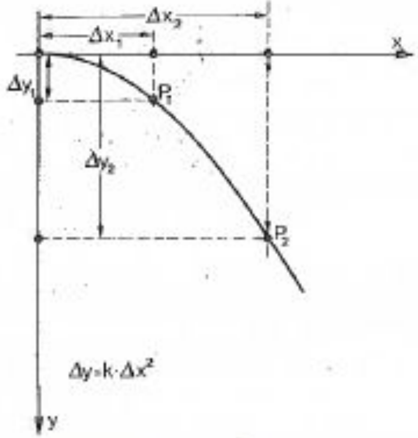
Lo spostamento verticale è invece uniformemente accelerato con accelerazione g.

Dopo un tempo Δt dall'istante in cui il corpo è passato per il punto più alto della sua traiettoria, i suoi spostamenti orizzontale e verticale valgono:

$$\Delta x = v_x \cdot \Delta t \quad \text{e} \quad \Delta y = \frac{1}{2} g \, \Delta t^2$$

Se ricavi Δt dalla prima di queste espressioni e lo sostituisci nella seconda, trovi:

$$\Delta y = \frac{1}{2} g \, (\Delta x^2 / v_x^2) = \frac{g}{2v_x^2} \Delta x^2 = \text{costante} \cdot \Delta x^2$$



Dunque lo spostamento verticale risulta proporzionale al quadrato dello spostamento orizzontale, e la traiettoria è proprio una parabola (fig. 32).

3.4.c Il moto dei proiettili

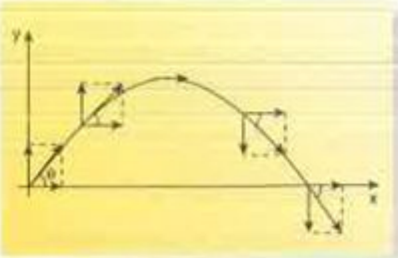


Fig. 3.33 Traiettoria di un proiettile sparato in una direzione formante un angolo θ con l'orizzontale. Si noti che la componente della velocità lungo x si mantiene costante.

Data la complessità della trattazione del moto bidimensionale nella sua espressione più generale possibile, ne proponiamo alcuni esempi iniziando con il moto dei proiettili.
Allo scopo si consideri un proiettile lanciato verso l'alto con velocità **v** in una direzione formante un angolo θ con l'orizzontale. Nell'analisi di questa situazione supporremo trascurabile la presenza dell'aria. Riferiamo il moto e la conseguente traiettoria al solito sistema cartesiano ortogonale Oxy con l'asse y rivolto verso l'alto come in figura 3.33.
In questo caso i valori delle grandezze cinematiche sono:
$a_y = -g$ (l'accelerazione verso il basso è dovuta alla gravità)
$a_x = 0$ (non vi è componente orizzontale dell'accelerazione)
$v_x = v \cdot \cos\theta$
$v_y = v \cdot \text{sen}\,\theta$
Dal momento che l'accelerazione non ha componente lungo l'asse x la componente orizzontale della velocità v_x rimane costante (in quella direzione il moto è rettilineo ed uniforme), mentre la componente verticale della velocità varia secondo le leggi del moto uniformemente accelerato ed il suo valore in un punto P qualsiasi sarà:

$$v_P = v_y - g \cdot t$$

Il moto risultante è dunque dato, istante per istante, dalla composizione (somma) di due moti: uno rettilineo ed uniforme lungo l'asse x, ed uno uniformemente accelerato lungo l'asse y. Le componenti dello spostamento del proiettile all'istante t sono:

$$x = v_x \cdot t \qquad\qquad y = v_y \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Ricavando t dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda si ottiene:

$$y = \frac{v_y}{v_x} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_x^2}$$

Essendo v_x, v_y e g valori fissati in maniera univoca una volta definite le condizioni iniziali (si noti tra l'altro che $v_y/v_x = \operatorname{tg}\theta$) l'equazione può essere scritta come:

$$y = b \cdot x - a \cdot x^2$$

È immediato riconoscere che questa è l'equazione di una parabola. Dunque la traiettoria del proiettile ha forma parabolica.

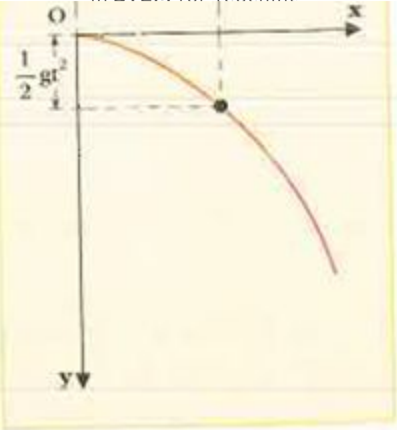


Figura 20. Un grave lanciato orizzontalmente descrive una traiettoria parabolica con asse verticale.

che occuperebbe se avesse seguito i due movimenti ... l'uno all'altro.

4.2 Traiettoria parabolica dei proiettili

L'indipendenza del movimento verticale da quello orizzontale nel moto di un proiettile fu messa in evidenza da Galileo nei *Discorsi intorno a due nuove scienze* (IV giornata).

Ecco infatti come Galileo fa concludere al suo interlocutore Sagredo: "Non si può negare che il discorso sia nuovo, ingegnoso e concludente, argomentando ex supposizione, supponendo cioè che il moto trasversale si mantenga sempre equabile, e che il naturale deorsum parimenti mantenga il suo tenore, d'andarsi sempre accelerando secondo la proporzione duplicata dei tempi, e che tali moti e le loro velocità, nel mescolarsi, non si alterino perturbino ed impedischino, sì che finalmente la linea del proietto non vadia, nella continuazione del moto, a degenerare in un'altra spezie".

Fissato un sistema di assi cartesiani con l'origine O nel punto di lancio del proiettile, l'asse x orizzontale orientato nel verso della velocità di lancio $\vec{v}_0$ e l'asse y verticale orientato verso il basso (fig. 20), generalizzando quanto abbiamo osservato nell'esperimento di simulazione, se g è l'accelerazione di gravità, le componenti della velocità del proiettile sono:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = gt \end{cases}$$

3 IL PRINCIPIO DI COMPOSIZIONE DEI MOTI

Consideriamo il moto di un punto materiale nel piano. Fissato un sistema di coordinate cartesiano, il moto del punto materiale può essere scomposto in due moti **indipendenti** l'uno dall'altro, uno lungo la direzione x, l'altro lungo la direzione y. Il moto del punto materiale è così descritto da un vettore posizione che varia nel tempo di componenti $x(t)$ e $y(t)$, che sono rispettivamente le leggi orarie delle proiezioni del punto sui due assi coordinati.

Per i moti nel piano è valido dunque il *principio di composizione dei moti*: nei moti in due dimensioni, lo **spostamento totale** è la somma vettoriale degli spostamenti che avvengono in ognuna delle due dimensioni:

$$\vec{s}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y}$$

Enlightening
Interdisciplinarity
in STEM for Teaching

Queste sono dimostrazioni?

Sono spiegazioni scientifiche? Se sì, di che tipo?

Che ruolo gioca la matematica?

Come lo percepiscono gli studenti?

4 MOTI IN DUE DIMENSIONI: IL MOTO DEL PROIETTILE

Il moto di un punto materiale di massa m, lanciato con una certa velocità iniziale v_0 e soggetto alla sola azione della forza di gravità, è detto **moto del proiettile.**

Scegliamo un sistema di riferimento con l'asse x parallelo al suolo e l'asse y perpendicolare al suolo e diretto verso l'alto. Il principio di composizione dei moti consente di descrivere il moto del proiettile come la composizione di un moto rettilineo uniforme lungo l'asse x e di un moto uniformemente accelerato con accelerazione costante $-g = -9{,}8\ \text{m/s}^2$ lungo l'asse y.

Indichiamo con x_0 e y_0 le componenti della posizione iniziale del proiettile e con v_{0x} e v_{0y} le componenti della sua velocità iniziale; le leggi orarie sono:

$$\vec{s}(t) \rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) \rightarrow \begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}$$

$$\vec{a}(t) \rightarrow \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \end{cases}$$

Determiniamo l'equazione della traiettoria dalle leggi orarie della posizione, eliminando il parametro tempo; l'equazione cartesiana della traiettoria che si ottiene è quella di una parabola:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x - \frac{g}{2v_{0x}^2}x^2$$

Trasposizione disciplinare:

nelle scuole, in matematica, emerge infatti un'altra **divisione interna che la separa nei domini algebra, geometria, analisi, statistica** e così via (Boero, Guala & Morselli 2013) → difficoltà a livello didattico, ma anche a costruire negli studenti (e non solo) una visione che, oltre ad essere cristallizzata e settoriale, è anche poco realistica.

Morselli e Boero (2009): adattamento alla didattica della matematica riguardante il costrutto del **"comportamento razionale"** per le pratiche discorsive, proposto da Habermas, in particolare riguardo **l'uso del linguaggio algebrico nelle dimostrazioni.**

Il linguaggio algebrico nelle dimostrazioni: pensate prevalentemente nella scuola secondaria come dominio della geometria sintetica, portando a un cambio radicale delle forme di spiegazione nel momento in cui si passa dalla geometria all'algebra.

Questa tendenza si riscontra nei libri di testo di matematica analizzati e rappresenta il sapere di riferimento degli studenti in matematica; **a questo sapere faranno riferimento pensando alla parabola e alla sua equazione in fisica.**

Tesi di Lorenzo Pollani (Rel. F. Morselli, Genova)

Tre «radici» della razionalità
(Morselli e Boero 2009)

Sei funzioni della spiegazione
(Levenson, Barkai e Larsonn 2013)

Domande di ricerca

- **Quali tipi di spiegazione emergono dai testi? Quali sono i più frequenti?**

- **Quali sono le radici della razionalità che emergono dai testi? Quali sono quelle maggiormente presenti?**

Velocità iniziale orizzontale

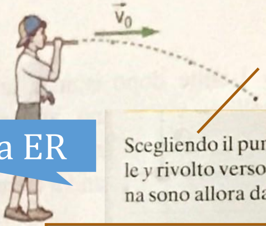
CR

Una pallina è lanciata *in orizzontale* con velocità iniziale $\vec{v}_0$ (→figura a destra). Trascurando l'attrito con l'aria, l'unica forza che agisce sulla pallina è il suo peso; quindi per il secondo principio della dinamica la pallina ha un'accelerazione uguale a quella di gravità:

$$\vec{a} = \vec{g}.$$

ER

Carenza ER



Poiché $\vec{g}$ è *verticale* e rivolto verso il basso,

- non esiste alcuna accelerazione orizzontale: in orizzontale la pallina continua a muoversi per inerzia alla velocità iniziale $\vec{v}_0$;
- esiste una accelerazione verticale costante: il moto verticale della pallina è uniformemente accelerato, con accelerazione pari a $\vec{g}$.

Direzionalità L. I

Da queste due osservazioni si deduce che

Carenza ER

il moto di un oggetto lanciato in orizzontale è la sovrapposizione di due moti:
- un moto rettilineo uniforme orizzontale,
- un moto rettilineo uniformemente accelerato verticale.

Funzione 2 (argomenta)

Soggetto impersonale di autorità

Introduzione sdr

Carenza razionale: «se…»

Scegliendo il punto di partenza come origine degli assi coordinati e l'asse delle y rivolto verso l'alto, le coordinate x e y delle posizioni occupate dalla pallina sono allora date dalle formule

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad (8)$$

ER

Carenza Funzione 5 (giustifica) o CR (engagement)?

Isoliamo t nella prima equazione del sistema (8) e sostituiamolo nella seconda equazione:

$$\begin{cases} t = \frac{x}{v_0} \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{v_0} \\ y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{v_0} \\ y = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} x^2 \end{cases}.$$

L'equazione

$$y = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} x^2 \qquad (9)$$

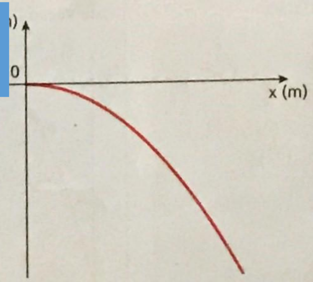
Capovolgimento temporale (enunciato-dimostrazione)

fornisce l'equazione cartesiana della traiettoria seguita dalla pallina. Essa rappresenta una parabola che ha il vertice nell'origine degli assi.

La traiettoria di un oggetto lanciato in orizzontale è una *parabola*.

Funzione 3 (interpreta)

La parabola
La parabola, con vertice nell'origine degli assi, ha equazione $y = ax^2$. Quando, come in questo caso, il coefficiente a è negativo, la concavità è rivolta verso il basso.



Quali tipi di spiegazione emergono dai testi? Quali sono i più frequenti?

- Testi storici: funzione 2 (argomenta), 3 (interpreta) e 5 (giustifica)
- Manuali scolastici: funzione 1 (descrivi), 2 (argomenta) e 3 (interpreta)

Quali sono le radici della razionalità che emergono dai testi? Quali sono quelle maggiormente presenti?

- Testi storici: «consapevolezza razionale» globale ed esplicita, comunicazione e argomentazione supportate
- Manuali scolastici: «sospensione» teleologica, comunicazione alternante a tratti epistemicamente incompleta

Concludendo...

- fornisce ***boundary objects*** con **valenza epistemologica per le discipline**
- permette di attivare ***boundary crossing mechanisms***
- permette di **ripensare le discipline esplicitando le assunzioni** e riflettendo sulla loro **specificità** epistemologica e le loro **contaminazioni**
- la **contestualizzazione storica** è pertinente e può far riaccendere il potenziale di apprendimento interdisciplinare
- fa ripensare alla matematica e alla fisica come **"discipline di pensiero"**
- consente di affrontare un **problema tipico** (grafici, traiettoria-legge oraria, principi, ..) dando **nuovi strumenti concettuali**

IDENTITIES

Enlightening
Interdisciplinarity
in STEM
for Teaching

ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITÀ DI BOLOGNA | UNIVERSITAT DE BARCELONA | ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ UNIVERSITY OF CRETE | UNIVERSITÉ MONTPELLIER | UNIVERSITÀ DI PARMA

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union
Grant Agreement n°2019-1-IT02-KA203-063184