Università di Genova

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Dipartimento di Matematica
Laurea Magistrale in Matematica

Interdisciplinarità tra Matematica e Fisica: analisi di testi in termini di razionalità e spiegazione

Candidato:
Pollani Lorenzo

Relatore:
Prof.ssa Francesca Morselli

Correlatore:
Prof.ssa Laura Branchetti

Anno Accademico 2019/2020

A tutte le persone che vogliono accendersi per apprendere, di cui credo di far parte

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Il presente lavoro di tesi costituisce un punto di intersezione tra il progetto europeo Erasmus+ IDENTITIES, avviato nel 2019, e la ricerca in Didattica della Matematica presentando un'analisi di testi originali per contribuire allo sviluppo di consapevolezza interdisciplinare tra Matematica e Fisica. Attraverso le lenti teoriche della razionalità, presentata in Morselli e Boero (2009) e in Boero (2006), e della spiegazione, presentata in Levenson, Barkai e Larsson (2013), vengono infatti studiati le Indicazioni Nazionali del Ministero dell'Istruzione, alcuni estratti dalla «Giornata Terza» dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed i movimenti locali* di Galilei e da *Isaac Newton's Philosophiae naturalis Principia mathematica* di Newton e il capitolo 10.4 del manuale scolastico *La fisica di Amaldi* intitolato «[i]l moto dei proiettili.» I testi vengono analizzati per indagare come viene percepita la dimensione interdisciplinare tra Matematica e Fisica in due ambiti apparentemente separati: l'ambito storico-epistemologico, dove è presente una concezione unitaria del sapere e dove la comunicazione tra autori e comunità destinataria avviene su un piano di parità, e l'ambito scolastico, dove il sapere è proiettato in discipline che si presentano spesso settoriali e monologanti e dove la comunicazione avviene in un regime asimmetrico[1] tra autori, insegnanti e lettori-studenti destinatari.

Esiste poi una divisione interna alla Matematica nei domini di algebra, analisi, geometria e così via che, oltre a favorire una visione statica, spesso causa difficoltà e ostacoli didattici (Boero, Guala e Morselli 2013).

Inoltre, in Branchetti, Bagaglini et al. (2021, p. 1) emerge come la concezione settoriale dei saperi, nello specifico in Matematica e Fisica, favorisca un «disallineamento, quantomeno percepito, tra quello che si impara a scuola e quello che la società contemporanea richiede di affrontare», in particolare alla luce delle nuove conoscenze STEM[2]. Sorge quindi un bisogno intrinseco

[1]Questa idea è espressa da Viale (2019, p. 27), come citato in Branchetti, Bagaglini et al. (2021, p. 5): «[nel manuale disciplinare vige una] forte asimmetria delle competenze tra i suoi utenti e i redattori che comunicano le informazioni rivolte ad essi.»

[2]Per ulteriori approfondimenti sui temi STEM si può vedere ad esempio il sito unesco.org.

di riorganizzazione per realizzare pienamente gli obiettivi di competenza espressi anche nelle Indicazioni Nazionali del Ministero dell'Istruzione in:

> Saper compiere le necessarie interconnessioni tra i metodi e i contenuti delle singole discipline [...] Comprendere le strutture portanti dei procedimenti argomentativi e dimostrativi [...] [e] usarle in particolare nell'individuare e risolvere problemi di varia natura[3].

La presente ricerca nasce da una passione che è diventata un obiettivo: lavorare, probabilmente come insegnante di scuola secondaria, nel campo della didattica della Matematica (e della Fisica). Nel nostro percorso personale abbiamo cercato di sviluppare questo trasporto verso la didattica in particolare della Matematica arricchendola con la lettura di testi originali anche in latino e favorendo la costruzione attiva del sapere, traendo ispirazione dal pensiero espresso in Plutarco (2018, p. 87) secondo cui

> [l]a mente non ha bisogno, come un vaso, di essere riempita, ma piuttosto, come legna, necessita di una scintilla che l'accenda e vi infonda l'impulso della ricerca e un amore ardente per la verità.

Durante l'anno accademico scorso abbiamo avuto l'occasione piacevolmente inaspettata di assistere, su invito della professoressa Francesca Morselli, ad un seminario tenuto dalla professoressa Laura Branchetti. Il seminario, rivolto principalmente ad insegnanti di scuola secondaria, presentava il lavoro esposto nell'articolo di Branchetti, Cattabriga e Levrini (2019) sul corpo nero toccando alcune questioni interdisciplinari di carattere generale e storico-epistemologico. In quella presentazione abbiamo sviluppato interesse verso la visione interdisciplinare che concretizzava un legame di cui eravamo implicitamente consapevoli, ma fino a quel momento informe: per molto tempo infatti ci siamo limitati a pensare che il legame fosse dovuto alla figura di un solo docente che insegnava entrambe le discipline in continuità oraria.

Nella letteratura presente sul tema si evidenzia che per poter realizzare una visione interdisciplinare autentica tra Matematica e Fisica è necessario prendere in considerazione un ruolo della Matematica in Fisica che si distacca da, o meglio non si limita ad essere, puramente strumentale ma un complesso e multiforme intreccio di funzioni strumentale, strutturale e linguistica. Viceversa, anche il ruolo della Fisica nella Matematica deve essere rivalutato nella didattica: essa non rappresenta (solo) un contesto per l'applicazione delle tecniche e dei concetti visti nel parallelo corso di Matematica, ma spesso la naturale promotrice di conoscenza, lo stimolo per sviluppare nuovi strumenti e concetti matematici, come ad esempio l'analisi e le equazioni differenziali (si vedano ad esempio Uhden et al. 2011; Karam (2015); Tzanakis (2016)).

[3]Si veda DPR 15 marzo 2010, n.87-89 p. 98, 107

Sottolineando questa relazione multiforme, Uhden et al. (2011) hanno sviluppato un modello innovativo per analizzare i differenti livelli di ragionamento matematico in Fisica. Quest'utile risorsa è stata utilizzata da Branchetti, Cattabriga e Levrini (2019) per sviluppare materiali didattici interdisciplinari a livello universitario relativi alla svolta storica più importante in Fisica, ossia la quantizzazione.

D'altra parte, Karam (2015) propone di superare la visione puramente strumentale, «plug-and-chug», attraverso un cambio di paradigma nelle richieste didattiche, sottolineando l'importanza delle domande «whys» rispetto a «hows» e traslando l'obiettivo da «calcola e descrivi» a «spiega e comprendi.»

In particolare in questa tesi, attraverso l'analisi dei testi cercheremo di indagare la presenza e l'efficacia della spiegazione e dell'atteggiamento razionale che vengono proposti ai rispettivi destinatari da una parte in una dimensione storica, legata ad una visione interdisciplinare del sapere, e dall'altra in una dimensione didattica, che si presenta disciplinare nella struttura.

I risultati ottenuti apriranno insegnanti e ricercatori a maggiore consapevolezza e speriamo contribuiscano in seguito all'interno del progetto IDENTITIES alla realizzazione di risorse educative ad accesso libero per la promozione e la formazione degli insegnanti sul tema dell'interdisciplinarità.

La tesi si articola in più capitoli. Nel primo vengono brevemente presentati alcuni articoli di riferimento per il rapporto di interazione tra Matematica e Fisica, e il progetto europeo IDENTITIES, con i suoi obiettivi e le sue metodologie, che faranno parzialmente da sfondo alla nostra ricerca. Segue un capitolo in cui vengono descritte le due lenti teoriche, della razionalità e della spiegazione, utilizzate per analizzare i testi a disposizione e la loro combinazione proposta da Morselli e Levenson (2014). Alla fine del capitolo sono esplicitate le nostre domande di ricerca che ci guideranno nell'analisi. Dopo un breve capitolo in cui esponiamo la metodologia della nostra ricerca, vengono esposti i risultati dell'analisi delle Indicazioni Nazionali, dei testi storici di Galilei e di Newton, e del capitolo tratto dal manuale di Amaldi. Nell'ultimo capitolo si discutono i risultati ottenuti e si traggono le conclusioni. L'esposizione termina con un'appendice in cui sono riportati i testi storici in originale, in modo che il lettore possa avere accesso alla matrice da cui abbiamo tratto la nostra traduzione.

Capitolo 2

Interdisciplinarità: una parola chiave

Il rapido progresso della tecnologia spesso comporta la nascita e la richiesta di conoscenze fortemente interdisciplinari, «frutto della collaborazione tra esperti di settori diversi»[1]. Tuttavia, anche se i richiami alle tematiche dell'interdisciplinarità e allo sviluppo storico-epistemologico del sapere sono presenti nei documenti ministeriali e nelle Indicazioni Nazionali[2], il mondo scolastico sembra ancora fossilizzato su una visione disciplinare e settoriale, che favorisce un divario sempre più evidente tra intra-scolastico ed extra-scolastico (Branchetti, Bagaglini et al. 2021).

In questa prospettiva, l'interdisciplinarità si deve intendere come un «incontro tra discipline»[3], da non strumentalizzare per favorire una visione algoritmico-procedurale; più precisamente, in Frodeman, Klein e Pacheco (2017), come citato in Branchetti, Bagaglini et al. (2021, p. 2), si parla di *interdisciplinarità* quando le discipline si integrano e, interagendo, si fondono reciprocamente.

Nasce quindi il bisogno di analizzare i testi a disposizione, in quanto incarnano il modo in cui il sapere viene presentato al lettore (lo studente o la comunità scientifica). In particolare, possiamo separare la tipologia dei testi in due categorie: da una parte si inseriscono i testi storici, che non nascono come strumenti didattici per la classe, e che presentano una concezione unitaria autentica del sapere in dialogo e in prospettiva storico-epistemologica; dall'altra troviamo i manuali scolastici, libri che si rivolgono agli studenti e che dovrebbero supportarli nella costruzione delle conoscenze, delle

[1] Branchetti, Bagaglini et al. 2021, p. 1

[2] Il contenuto di questi documenti verrà presentato e analizzato in dettaglio nel paragrafo dedicato del capitolo 5.

[3] Il termine «disciplina» viene definito in Gombi (2020, p. 9) e in Branchetti, Bagaglini et al. (2021, p. 1) come una «forma di organizzazione della conoscenza.» In Gombi (2020) si possono trovare maggiori dettagli e approfondimenti, che rielaborano e approfondiscono la definizione strutturandola maggiormente.

abilità e delle competenze (inter)disciplinari utili per affrontare la società contemporanea.

Vogliamo presentare in questo capitolo alcuni articoli che riteniamo particolarmente significativi per essere consapevoli della ricchezza interdisciplinare presente nel rapporto tra Matematica e Fisica, e che costituiscono la base su cui innestiamo il nostro successivo lavoro di tesi. Perciò, abbiamo scelto di esporre riassuntivamente gli studi di Uhden et al. (2011), di Karam (2015) e di Tzanakis (2016), che evidenziano il caleidoscopico rapporto tra Matematica e Fisica. Nella seconda sezione del capitolo introduciamo brevemente il progetto europeo IDENTITIES, che rappresenta il contesto in cui il presente lavoro di tesi si inserisce.

2.1 Un'interazione ininterrotta e proficua

Questa prima sezione presenta i contenuti degli articoli di Uhden et al. (2011), Karam (2015) e Tzanakis (2016), a sostegno di un'interazione solida e dinamica che va ben oltre quanto spesso viene proposto nell'insegnamento della Matematica e della Fisica e che si evidenzia già a partire dalla dimensione storica.

In generale, l'indagine di questi studi sottolinea fin dagli inizi un'influenza reciproca e un profondo intreccio tra Matematica e Fisica[4], ben espresso dalla frase citata in Uhden et al. (2011, p. 485):

> «[I]t is impossible to explain honestly the beauties of the laws of nature in a way that people can feel, without their having some deep understanding of mathematics»[5] (Feynman 1965, pp. 39–40)

e dalla frase di Galilei, ricordata in Tzanakis (2016, p. 1): «this grand book, the Universe, [. . .] is written in the language of Mathematics» [6].

In Karam (2015, p. 488), e soprattutto in Tzanakis (2016), viene enfatizzato l'aspetto storico[7] della relazione dinamica tra Matematica e Fisica, ricordando che la netta separazione delle discipline è un fatto relativamente recente, che spesso l'analisi di casi storici amplia la nostra comprensione di questa interazione stretta, continua, ininterrotta, bidirezionale[8] e proficua e che quindi la dimensione storico-epistemologica non può e non deve essere

[4] In Tzanakis (2016, p. 1) si parla di una «profonda affinità epistemologica.»

[5] «[È] impossibile spiegare onestamente le bellezze delle leggi di natura in modo che le persone possano percepire, senza che abbiano una qualche comprensione profonda della matematica.» [Trad. nostra]

[6] «[Q]uesto grandissimo libro [. . .] l'Universo[. . .] è scritto in lingua matematica» (Galilei 1964, p. 361).

[7] Si veda in particolare il paragrafo 3.2 in Tzanakis (2016, pp. 8–9) sul ruolo della storia della Matematica e della Fisica nel loro insegnamento e apprendimento.

[8] In Tzanakis (ibid., p. 6) si precisa che questo processo avviene «dalla matematica alla fisica» e «dalla fisica alla matematica.»

trascurata. A questo proposito, vengono ricordati in Uhden et al. (2011) alcuni esempi[9] che mostrano come la nascita di alcuni concetti matematici, ad esempio l'analisi di Fourier e le equazioni differenziali, sia motivata da problemi emersi dal contesto fisico, posizione condivisa da Karam (2015, p. 489) nella citazione del lavoro di Kline (1981).

In Uhden et al. (2011, p. 486) vengono inoltre evidenziati tre aspetti del ruolo della Matematica in Fisica; più precisamente, la Matematica può essere uno strumento procedurale (prospettiva pragmatica), ossia un bagaglio di tecniche di calcolo, un linguaggio (funzione comunicativa), in cui esprimere le osservazioni e formulare le teorie, e un modo logico-deduttivo di ragionare (funzione strutturale), che fornisce concetti e che permette, appunto, di strutturare il ragionamento e il pensiero in modo razionale. In particolare, le ultime due dimensioni guidano verso una «matematizzazione della fisica» che permette non solo di avere una «rappresentazione più concisa e precisa»[10] ma soprattutto di creare nuova conoscenza nel processo di traduzione in linguaggio matematico, anche tramite l'individuazione di analogie formali che permettono di immaginare nuovi fenomeni[11] (ibid.).

Questa ricchezza di connessioni viene generalmente impoverita nell'ambito scolastico separato delle discipline, dove la Matematica assume nell'insegnamento della Fisica un ruolo estrinseco puramente tecnico e calcolativo, e dove la Fisica viene confinata nell'insegnamento della Matematica solo a possibile contesto/sorgente esterna di esercizi in cui applicare i concetti matematici già ricavati precedentemente in modo astratto: si consolida così il paradigma convenzionale dicotomico di una Matematica estremamente formale e una Fisica intuitiva (Karam 2015; Tzanakis (2016)). Questo impoverimento, come confermano sia le opinioni degli insegnanti sia le ricerche didattiche, si ripercuote in un apprendimento degli studenti basato sulla memoria di formule, in effetti sul determinare quale formula matematica usare, come evidenziato in Karam (2015, p. 490), e non sulla loro autentica «comprensione fisica dei fenomeni»[12] descritti, creando difficoltà anche nel contesto della risoluzione di problemi. Gli studi di Bing e Redish (2009), citati in Uhden et al. (2011, p. 487), evidenziano nella una strategia comune, probabilmente indotta dalla formulazione dei quesiti a cui gli studenti sono maggiormente esposti, ossia

> blindly plugging quantities into physics equations and churning out numeric answers without understanding the physical meaning of their

[9]Maggiori esempi e dettagli possono essere trovati nel paragrafo 2.2 di Tzanakis (2016, pp. 4–5) sullo sviluppo storico correlato della Matematica e della Fisica.

[10]Uhden et al. 2011, p. 490

[11]Il «potere creativo delle analogie in fisica» è stato studiato ad esempio nell'articolo di Gingras (2015), citato in Karam (2015, p. 488), e nell'articolo di Branchetti, Cattabriga e Levrini (2019).

[12]Questa espressione è tratta dall'articolo di Greca e Moreira (2002, p. 119), come citato in Uhden et al. (2011, p. 492).

calculations[13] (Uhden et al. 2011, p. 487).

In particolare, gli articoli di Uhden et al. (ibid.) e di Karam (2015) si concentrano su come poter riequilibrare e favorire la varietà dei ruoli della Matematica nell'insegnamento della Fisica per permettere la piena acquisizione dei concetti (soprattutto fisici) in profondità. Bisogna essere inoltre consapevoli del fatto che le abilità matematiche siano un prerequisito necessario ma non sufficiente all'apprendimento della Fisica, come ricorda Hudson e McIntire (1977), citato da Uhden et al. (2011), e che la «matematica nella matematica» è semanticamente differente rispetto alla «matematica nella fisica», come sostenuto da Redish (2006), citato da Karam (2015, p. 489) e da Uhden et al. (2011, p. 486).

Come conseguenza a queste considerazioni, vengono proposti alcuni strumenti e indicazioni per sostenere un insegnamento autentico del complesso e intrecciato rapporto tra Matematica e Fisica: in Uhden et al. (ibid.) viene presentato un nuovo modello per l'analisi del ragionamento matematico all'interno della Fisica, per distinguere l'uso significativo della matematica da quello strumentale e per aiutare nell'insegnamento e apprendimento dei significati fisici, comprendendone gli aspetti anche matematici. Questo nuovo strumento è già stato utilizzato, oltre all'esempio proposto nell'articolo stesso di Uhden et al. (ibid.), anche nelle attività del progetto IDENTITIES con il lavoro di Branchetti, Cattabriga e Levrini (2019), nel quale vengono analizzati testi originali di Planck relativi all'ipotesi di quantizzazione nel caso del corpo nero, per ricostruirne il ragionamento. Lo stesso articolo presenta anche un tutorial implementato nelle classi universitarie che ha già mostrato ottimi risultati nella direzione suggerita da Uhden et al. (2011).

Karam (2015), invece, si concentra su come cambiare il tipo di richieste sulle equazioni e sulle formule da presentare agli studenti per promuovere l'uso strutturale della Matematica in Fisica. Proponendo la distinzione tra domande «hows» e «whys», Karam (ibid., p. 491), riguardo alle equazioni fisiche, suggerisce di superare la tradizione «plug-and-chug»[14] nell'insegnamento della Fisica traslando l'obiettivo da «calcola e descrivi» a «spiega e comprendi.»

2.2 Il progetto IDENTITIES

La nostra ricerca si inserisce all'interno del progetto europeo Erasmus+[15] denominato IDENTITIES[16], acronimo di *Integrate Disciplines to Elaborate Novel*

[13]«[I]nserire alla cieca quantità nelle equazioni fisiche e sfornare risposte numeriche senza comprendere il significato fisico dei loro [degli studenti] calcoli.» [Trad. nostra]

[14]Letteralmente «inserisci e sbuffa [se non ottieni il risultato atteso].» [Trad. nostra]

[15]Il termine Erasmus è acronimo di *EuRopean community Action Scheme for the Mobility of University Students*, ossia «schema di azione della comunità europea per la mobilità degli studenti universitari.» [Trad. nostra]

[16]Il sito di riferimento per il progetto è identitiesproject.eu.

Teaching approaches to InTerdisciplinarity and Innovate preservice teacher Education for STEM[17] *challenges*[18] che coinvolge l'Università di Barcellona, Bologna (coordinatrice), Creta, Montpellier e Parma. Quest'iniziativa si propone di progettare nuovi materiali a libero accesso, nuove attività didattiche in classe e nuovi modelli di co-insegnamento tra matematica, fisica e informatica, partendo dall'analisi delle forme di organizzazione della conoscenza interdisciplinare. Oltre agli argomenti interdisciplinari che possono emergere all'interno della scuola (in Branchetti, Bagaglini et al. (2021) si ricordano la parabola e il moto dei proiettili, la gravitazione, la geometria euclidea e la crittografia), il progetto europeo esplora anche la dimensione interdisciplinare che emerge nei nuovi temi avanzati di conoscenza STEM, come ad esempio l'intelligenza artificiale.

Nel resto della sezione vogliamo presentare più nel dettaglio la genesi del progetto, i suoi obiettivi e le sue metodologie in quanto saranno il punto di partenza per l'analisi successiva che andremo a condurre. Quanto descritto di seguito è ricavato dall'articolo Branchetti, Bagaglini et al. (ibid.), dalla tesi di Laurea Magistrale Gombi (2020) e dal sito del progetto IDENTITIES.

Come si apprende da Branchetti, Bagaglini et al. (2021) e dal sito del progetto, IDENTITIES coinvolge le università di quattro Paesi europei (Francia, Grecia, Italia e Spagna) sotto il coordinamento della prof.ssa Olivia Levrini[19].

Il progetto inizia la sua realizzazione nel Novembre 2019, quando all'interno del Progetto Lauree Scientifiche (abbr. PLS) di Fisica dell'Università di Bologna viene proposto un corso di formazione dal titolo «Strumenti di analisi e comprensione del testo scientifico per l'interdisciplinarità: un confronto tra fonti e manuali su temi di fisica e matematica.» Il corso è stato inizialmente rivolto a insegnanti di Matematica e Fisica, e successivamente anche a docenti di Lettere e Filosofia in servizio di scuola secondaria di secondo grado, per sensibilizzarli alla tematica interdisciplinare. La realizzazione del corso ha coinvolto anche i Piani di Orientamento e Tutorato (abbr. POT) di Studi Umanistici «Oltre le due culture: Per un dialogo interdisciplinare fra logica, filosofia e scienze della comunicazione.»

Articolandosi su una durata complessiva di dodici ore, suddivise in tre incontri frontali e un workshop conclusivo, il seminario si è proposto di studiare il problema interdisciplinare curricolare della parabola e del moto parabolico da un punto di vista storico-epistemologico. Dopo un'introduzione iniziale e una presentazione dei contenuti, la parte centrale del corso si è focalizzata sulla ricostruzione disciplinare di testi originali (tratti da Apollonio, Euclide, Keplero, Guidobaldo del Monte e Galileo), sui alcuni manuali

[17] Il termine STEM è, a sua volta, acronimo di *Science, Technology, Engineering and Mathematics*, ossia «Scienza, Tecnologia, Ingegneria e Matematica.»

[18] «Integrare le discipline per elaborare nuovi approcci di insegnamento all'interdisciplinarità e innovare la formazione degli insegnanti pre-servizio per le sfide STEM.» [Trad.nostra]

[19] Professoressa associata del Dipartimento di Fisica e Astronomia "Augusto Righi", Università di Bologna.

scolastici disciplinari sia di Matematica che di Fisica, e sugli strumenti, sia linguistici sia epistemologici, con cui studiarli prendendo consapevolezza delle potenzialità sul piano «contenutistico, [...] didattico [...] [e] linguistico-espressivo» nonché delle «possibili difficoltà di lettura e comprensione [...] da parte di studenti ancora in fase di formazione»[20]. Dall'analisi dei libri di testo, inizialmente condotta con l'obiettivo di «favorire un atteggiamento positivo e costruttivo»[21], di integrazione del libro di testo con nuove attività mirate e progettate, è emerso un giudizio critico riguardo ai manuali scolastici, ritenuti di dubbia efficacia, «troppo sintetici», poco espliciti, promotori di una trasmissione delle informazioni rispetto ad una loro argomentazione, e ben distanti dalla ricchezza storico-epistemologica dei contenuti trattati. Di conseguenza si è sentita «la necessità di un ulteriore approfondimento»[22], realizzato con il lavoro di tesi di Gombi (2020) in cui viene condotta un'analisi dettagliata linguistica, disciplinare e interdisciplinare del manuale universitario Walker (2014) con le lenti teoriche presentate nel corso.

L'analisi di Gombi (2020) ha evidenziato una «maggiore quantità di informazione esplicitata al fine della comprensione del fenomeno [del moto dei proiettili]»[23], che non si esaurisce in pochi paragrafi, come nei libri di testo di scuola secondaria, ma occupa un'intera unità contribuendo alla guida del lettore nella comprensione e nel ragionamento. Un altro fronte di analisi è stato rappresentato dalla progressione dell'informazione: il fenomeno viene prima descritto con esempi e successivamente viene formulato il principio fisico (struttura che si ritrova invertita nei manuali per la scuola secondaria). Inoltre, indagando il rapporto tra figure e testo, a differenza dei manuali liceali, in cui si osserva una pura «narrazione dell'esempio»[24], nel testo universitario è presente un dialogo continuo dalle figure al testo: le prime contribuiscono alla spiegazione e costituiscono il punto di partenza del testo, in cui si realizzano le riflessioni e i commenti che guidano alla graduale formulazione matematica del fenomeno. I risultati dell'analisi di Gombi (ibid.) e il confronto con quanto emerso dall'analisi del corso svolto nel 2019 hanno permesso di avere un atteggiamento più consapevole della portata epistemologica dei testi storici rispetto ai manuali scolastici nello sviluppo della conoscenza, e della possibilità di integrarli ai libri di testo come «prototipi di discorsi interdisciplinari»[25] e come fonti di ispirazione per realizzare un insegnamento efficace che tenga conto maggiormente della tematica dell'interdisciplinarità.

Per questo motivo nel nostro progetto di tesi analizzeremo anche i testi storici, prendendoli come punto di riferimento interdisciplinare.

[20] Branchetti, Bagaglini et al. 2021, pp. 5–6
[21] ibid., p. 11
[22] ibid., p. 6
[23] ibid., p. 22
[24] ibid., p. 24
[25] ibid., p. 27

Capitolo 3

Quadro teorico di riferimento

L'obiettivo di questa ricerca è contribuire al progetto IDENTITIES nell'indagine del rapporto di interdisciplinarità tra Matematica e Fisica e di come questo venga proposto (anche implicitamente) agli studenti, in particolare liceali, per concorrere alla realizzazione di percorsi didattici che riducano l'apparente disallineamento tra quanto si apprende a scuola e le richieste della società contemporanea.

Nell'articolo 2 «Identità dei licei» tratto dal DPR del 15 marzo 2010 n.87-89 si può apprendere come uno degli scopi finali del percorso scolastico (liceale) sia stimolare un «atteggiamento razionale» nello studente che affronta le situazioni quotidiane della realtà. D'altra parte, crediamo che sia opinione condivisibile includere tra le funzioni del libro di testo la spiegazione della disciplina relativa in modo fruibile dallo studente per l'apprendimento. Viste queste premesse, tra le molte possibili lenti teoriche per analizzare il tema dell'interdisciplinarità nei testi a nostra disposizione - che, oltre alle Indicazioni Nazionali e al libro di testo, sono alcuni passi tratti in originale dai lavori di Galilei e di Newton - abbiamo scelto di adottarne due: in particolare, tali strumenti sono l'adattamento di Morselli e Boero (2009) del costrutto della razionalità introdotto in Habermas (2001) e presentato nella prima sezione di questo capitolo e le funzioni della spiegazione di Levenson, Barkai e Larsson (2013) descritte nella seconda sezione. Il capitolo termina con un paragrafo che descrive la combinazione di queste due lenti, già proposta e utilizzata in Morselli e Levenson (2014), e una breve sezione in cui esplicitiamo le nostre domande di ricerca alla luce del quadro teorico di riferimento considerato.

3.1 Tre radici del comportamento razionale

Uno degli obiettivi trasversali conclusivi di un percorso liceale, come si apprende da Ministero dell'Istruzione (2010), è quello di fornire strumenti in modo che ogni studente possa mettere in atto un «atteggiamento *razionale*» (ibid., p. 10, Cors. agg.) per affrontare situazioni di vita quotidiana. Citando Schnädelbach (1992, p. 76), Habermas scrive: «solo chi è in grado di dire "io" o "noi" e di mettere a tema e ascrivere a se stesso quel che è o fa, è razionale», dove *razionale* si riferisce «in prima linea a opinioni, azioni ed enunciazioni linguistiche.» (Habermas 2001, p. 99) Le razionalità del sapere, dell'agire e del parlare sottendono un aspetto di consapevolezza intrinseco, almeno implicito, del motivo per cui le nostre scelte siano accettabili, concretizzato nell'«avere riflessivo» (ibid., p. 98).

A partire da questa considerazione semantica si evidenziano tre dimensioni inestricabilmente intrecciate di cui si compone la razionalità e che devono essere equilibrate per evitare fallimenti o errori e per sviluppare competenze matematiche (Boero e Morselli 2009).

Queste dimensioni sono nello specifico:

3.1.1 Razionalità epistemica, ossia del sapere (perché)

Scrive Habermas in relazione alla radice epistemica del comportamento razionale:

> Il nostro sapere si costruisce con proposizioni o giudizi [...] Noi *conosciamo* fatti [...] soltanto quando, contemporaneamente, sappiamo perchè i giudizi corrispondenti sono veri. Altrimenti parliamo di sapere intuitivo o implicito, di un sapere "pratico" di *come* si fa qualcosa. [...] Per qualificare un'opinione come razionale basta che essa [...] possa essere con buoni motivi [...] accettata razionalmente. [...] [L]a razionalità di un giudizio non implica la sua verità, bensì soltanto la sua motivata accettabilità in un dato contesto (Habermas 2001, p. 102).

L'interdipendenza della dimensione epistemica da quella comunicativa viene giustificata dal fatto che un sapere, per essere tale, deve essere rappresentabile in «una forma simbolicamente afferrabile», per permettere suoi ampliamenti e correzioni. D'altra parte, il legame con la radice teleologica si manifesta nel confronto tra l'applicazione del sapere nella pratica e il successo delle nostre azioni dirette verso uno scopo ed è ciò che ci permette di imparare per tentativi ed errori, come diremmo oggi (ibid., p. 103).

Ci sembra degna di nota in particolare l'ultima osservazione del passo citato di Habermas: la razionalità di un ragionamento non coincide necessariamente con la sua verità, intesa in termini assoluti, ma piuttosto con la sua validità e accettabilità relativa al contesto considerato (anche eventualmente storico, pensando in Fisica al superamento della meccanica classica con la meccanica quantistica).

In Morselli e Boero (2009) questa dimensione epistemica della razionalità viene intesa realizzata in Matematica quando le congetture e le azioni intraprese dall'agente nello svolgimento di una attività (matematica), viste come prodotti, vengono *consapevolmente* validate e contestualizzate in un quadro di riferimento - che può essere una teoria matematica, un sistema di assiomi, un risultato già dimostrato e così via - condiviso dalla comunità matematica coinvolta e utilizzando regole di ragionamento corrette e legittime per controllarne la dipendenza causale.

3.1.2 Razionalità teleologica, ossia dell'agire per un fine

Leggendo il testo di Habermas (2001, p. 103), nei passi sulla razionalità teleologica emerge l'endiadi azione-intenzione sostenuta dall'affermazione «[o]gni agire è intenzionale», sulla base della quale si argomenta che

> [l]a razionalità dell'agire si misura [...] a seconda che l'attore abbia o no *conseguito* questo risultato [quello in risposta all'azione intrapresa] in virtù di mezzi intenzionalmente scelti e messi in opera [ossia] quando [ha successo e] (a) sa perché ha avuto successo [...], e quando (b) questo sapere motiva [...] l'attore, sicché questi compie la sua azione per ragioni che possono insieme spiegare il suo possibile successo (ibid., p. 104).

Nelle complesse interconnessioni che intercorrono tra le dimensioni, quella teleologica si lega a quella epistemica in quanto le scelte operate sono in stretta correlazione con le informazioni possedute dal soggetto, che sono a loro volta fondate sulla comunicazione e sul linguaggio e quindi inevitabilmente sono interdipendenti dalla radice comunicativa.

In Morselli e Boero (2009) si parla di razionalità teleologica quando le strategie e i processi attivati dall'agente per svolgere l'attività vengono scelti in modo consapevole sulla base di obiettivi da raggiungere in modo efficiente ed efficace.

3.1.3 Razionalità comunicativa, ossia del parlare

Habermas afferma come il linguaggio non solo esprime verbalmente le intenzioni interiori del soggetto agente ma ha anche la funzione di rappresentare e, in un certo senso, di proiettare il sapere per condividerlo e per intendersi con una comunità. Sarà successivamente la comunità ascoltatrice che, in piena libertà, valuterà se accettare o meno, nel senso inclusivo del termine, il prodotto, ossia l'atto comunicativo e quanto esso contiene. Scrive infatti che

> la razionalità inerente alla comunicazione è fondata sulla connessione interna fra (a) le condizioni che rendono valevole un atto linguistico, (b) la pretesa sollevata dal parlante che queste condizioni siano soddisfatte, e (c) la credibilità della garanzia, che egli si è assunto, che in caso di necessità egli potrebbe riscattare discorsivamente questa pretesa di validità (Habermas 2001, p. 107).

Come si può evincere dalla descrizione, le dimensioni della razionalità presuppongono l'esistenza di un agente, di una attività che viene svolta dall'agente attivando processi ed ottenendo prodotti, e da una comunità ai cui standard l'agente fa riferimento perché i suoi prodotti e processi siano comprensibili, condivisibili e ripetibili, in termini di strategie, obiettivi e giustificazioni (Habermas 2001). Per questo è fondamentale l'aspetto metacognitivo di consapevolezza che pervade queste dimensioni e che emerge già nel riferimento ad un «avere riflessivo.» (ibid., p. 98)

La dimensione comunicativa emerge nella sua declinazione matematica, come descritto in Morselli e Boero (2009), quando l'attività, nei suoi processi e nei suoi prodotti, viene condivisa con la comunità usando consapevolmente mezzi di comunicazione adeguati e conformi ai modelli standard accettati dalla stessa. In effetti, l'aspetto comunicativo, che in un certo senso è il più visibile in quanto si concretizza in un discorso o in un testo, ha come obiettivo primario proprio l'inserimento dell'agente nella comunità (e viceversa), che si realizza quando l'atto linguistico - sia esso un discorso o un testo - è riconosciuto comprensibile e accettabile come credibile.

Oltre alla «declinazione disciplinare»[1] che si effettua generalmente nelle scuole, in Matematica emerge in particolare anche un'altra divisione interna che la separa nei domini algebra, geometria, analisi, statistica e così via[2]. Questa divisione contribuisce non solo a suscitare difficoltà a livello didattico, ma anche a costruire negli studenti (e non solo) una visione che, oltre ad essere cristallizzata e settoriale, è anche poco realistica (Boero, Guala e Morselli 2013).

Nel tentativo di superare questo paradigma, Boero, Guala e Morselli hanno sfruttato l'adattamento di Morselli e Boero (2009) e di Boero (2006) ai bisogni specifici della didattica della Matematica riguardante il costrutto del "comportamento razionale" per le pratiche discorsive, proposto da Habermas (2001). Questa nuova conformazione ha permesso di sviluppare ulteriormente uno strumento di analisi dettagliata per i domini della Matematica che rielabora lavori precedenti degli autori. Le attività complesse matematiche finora esplorate sono ascrivibili agli aspetti di congettura, dimostrazione e modellizzazione, sia a livello teorico progettuale delle attività (Morselli e Boero 2009; Boero, Guala e Morselli 2013) sia sul piano pratico-analitico delle difficoltà degli studenti (Boero 2006; Boero, Guala e Morselli 2013), in particolare riguardo l'uso del linguaggio algebrico nelle dimostrazioni (si veda a questo proposito Boero e Morselli 2009). Un contributo originale di questa ricerca è utilizzare questo strumento per l'analisi non di un atto linguistico prodotto dagli studenti, ma di testi storici e un libro di testo, che in particolare

[1] L'espressione «declinazione disciplinare» è usata nelle Indicazioni Nazionali, mentre in Boero, Guala e Morselli (2013, p. 97) si trova «disciplina divisa in domini separati.»

[2] Possiamo individuare una macro-divisione anche in Fisica, dove troviamo meccanica, termodinamica, ottica e così via.

dovrebbe essere strutturato e redatto per contribuire alla realizzazione degli obiettivi espressi nelle Indicazioni Nazionali del Ministero dell'Istruzione.

3.2 Sei funzioni della spiegazione

Tra gli obiettivi (e i prerequisiti) di un libro di testo implicitamente condivisi dalla società potremmo forse citare la "spiegazione" della disciplina e del suo modo di pensare, operare e conoscere: in effetti nella pratica didattica quotidiana emergono spesso termini collegati al dominio semantico della "spiegazione", essendo questa una parte del processo di pensiero e di comunicazione (Levenson, Barkai e Larsson 2013). In generale, ad una prima istanza possiamo vedere il concetto della spiegazione come una relazione logica tra una domanda e la sua relativa risposta, come evidenziano Levenson e Barkai (2013). In Yackel (2004) si parla della spiegazione come di un costrutto sociale, piuttosto che individuale, sviluppato dal rapporto tra insegnante e studenti, con funzione comunicativa di scioglimento di quei nodi di pensiero non immediatamente comprensibili.

Possiamo approfondire dall'etimologia[3] della parola il suo ricco significato: (di)s-piegare infatti deriva dalla particella *(di)s-* che dà senso contrario al termine latino *plicare*, affine al greco πλέκω che significa "intrecciare, attorcigliare."

Ci sono già stati studi che evidenziano l'importanza di dare e valutare diverse funzioni della spiegazione negli studenti: ad esempio l'articolo di Bowers e Doerr (2001), citato da Levenson, Barkai e Larsson (2013, p. 189), distingue tra spiegazione *concettuale* («conceptual explanation»), quando riferita al modo in cui processi e conoscenza entrano in comunicazione, e spiegazione *calcolativa* («calculative explanation»), quando descrive un processo di soluzione formale, o una sua parte.

Il lavoro di Levenson, Barkai e Larsson (ibid.), anche se non esplicitamente, comprende questa distinzione e la raffina specificando, unificando ed evidenziando altri aspetti che si possono trovare in letteratura (per approfondimenti si vedano Levenson e Barkai 2013 e Levenson, Barkai e Larsson 2013).

A partire dal workshop intitolato «Explorations, justifications, and proofs in elementary school», che si è svolto nell'Agosto 2011 e tra i cui obiettivi vi è la presa di consapevolezza del *continuum* dalla spiegazione alla dimostrazione passando per l'argomentazione e la giustificazione evidenziato da Dreyfus (1999, p. 102) in Levenson (2013), nelle scuole elementari, Levenson, Barkai e Larsson (2013) hanno evidenziato diversi aspetti - raffinando la divisone già proposta in Levenson e Barkai (2013) - che il termine "spiegazione" e derivati nascondono e che bisogna prendere in considerazione per evitare ambiguità nella pratica e nella comunicazione in classe. Analizzando

[3]Si veda la voce «[d]ispiegare, [s]piegare» dal sito etimo.it.

le indicazioni curricolari ufficiali in Israele e in Svezia, Levenson, Barkai e Larsson (2013) classificano sei[4] funzioni della spiegazione, più precisamente si fa riferimento a:

3.2.1 Funzione 1, ossia descrizione

Ci si riferisce alla funzione 1 della spiegazione quando questa è intesa come "spiega che cosa hai fatto" e quindi come descrizione di un processo o, meglio, di una procedura: è una funzione puramente descrittiva, che a priori non contempla i motivi soggiacenti alle scelte strategiche. Questa funzione si focalizza maggiormente sulla conoscenza procedurale.

3.2.2 Funzione 2, ossia argomentazione

La funzione 2 della spiegazione emerge in risposta ad uno "spiega perché", sottintendendo una motivazione concettualmente supportata da riferimenti espliciti a proprietà matematiche e generalizzazioni. Questa funzione si focalizza, rispetto alla precedente, in particolare sulla conoscenza concettuale, e incoraggia gli studenti ad una riflessione metacognitiva sugli oggetti matematici a cui si fa riferimento nella domanda "spiega."

3.2.3 Funzione 3, ossia interpretazione

Quando la richiesta di spiegazione comporta uno "spiega che cosa significa", inteso come interpretazione, o meglio, supportandosi con il campo semantico letterario, parafrasi di un concetto o di una affermazione puramente matematica in un contesto quotidiano, si parla della funzione 3 della spiegazione.

3.2.4 Funzione 4, ossia esplorazione

Ci si riferisce alla funzione 4 della spiegazione quando l'obiettivo soggiacente è "trovare tutte le possibili soluzioni e spiegare", ossia spingere lo studente verso l'esplorazione di nuove possibilità - sia di processi risolutivi, sia di prodotti -, per generalizzare o modellizzare; un po' come se fosse un investigatore e cercasse di descrivere tutto il *range* di situazioni che possono presentarsi. Gli autori suggeriscono come questa funzione possa essere vista come una generalizzazione delle precedenti, nel senso che per rispondere alla domanda "spiega", lo studente può anche richiamare la descrizione della sua soluzione, basandosi o meno su proprietà matematiche per poter generalizzare.

[4]In Levenson e Barkai (2013), dove l'analisi riguardava solo le indicazioni israeliane, le funzioni classificate erano state quattro: più precisamente, con riferimento alla numerazione in Levenson, Barkai e Larsson (2013), la funzione 1, 5, 2 e 4.

3.2.5 Funzione 5, ossia giustificazione (della strategia)

La funzione 5 della spiegazione emerge quando si chiede di "spiegare perché si è deciso di procedere in un certo modo", ossia giustificare la ragionevolezza o la plausibilità di una congettura o di una soluzione del problema; in altri termini quando la spiegazione fornisce un mezzo per sostenere le proprie scelte strategiche e per esplicitare il motivo per cui si è preferita una strategia a un'altra. Gli autori evidenziano come la giustificazione non debba necessariamente essere sostenuta da proprietà matematiche (a differenza della funzione 2), ma possa anche comprendere quelle motivazioni euristiche di intuizione o buon senso.

3.2.6 Funzione 6, ossia comunicazione

Nei documenti ufficiali analizzati dagli autori emerge anche un aspetto più generico in cui, facendo esplicito riferimento alle abilità comunicative richiamate dai documenti, la spiegazione rappresenta uno strumento comunicativo in ambito matematico in cui viene richiesto di "spiegare ai propri compagni."

La ricerca di Levenson, Barkai e Larsson si è proposta anche di indagare la frequenza con cui i termini e le funzioni della spiegazione compaiono nei documenti ufficiali e nelle risposte degli studenti, con l'obiettivo di identificare e di associare ad ogni forma una o più fasce di età in cui essa si presenta maggiormente. In particolare, lo studio di caso documentato in Levenson (2013) conduce una prima indagine sulle differenti funzioni della spiegazione della studentessa israeliana Sharon a differenti età per studiare lo sviluppo dei concetti matematici sul lungo termine. In Levenson e Barkai (2013) emerge che la spiegazione, processo in parte sociale, in parte comunicativo e in parte di ragionamento, è stimolata ad ogni livello scolare; più precisamente ad un livello prescolare (quindi fino a 5 anni circa) è dominante la funzione 1, quindi una descrizione che prescinde dalle proprietà matematiche associate e che si basa principalmente sulla *concept image* costruita dallo studente tramite l'esperienza, coerente con l'obiettivo dei documenti ufficiali di coinvolgere e promuovere abilità di ragionamento generali. Per gli studenti di età maggiore, a livello di scuola primaria (quindi fino a 11 anni circa), la funzione si modifica passando da una natura descrittiva ad una più matematica, basata sulle definizioni e sulle relative proprietà, ed esplorativa. Scrivono infatti Levenson e Barkai:

> [w]e do see, however, a subtle shift from the preschool to the elementary school. In the preschool, it seems that more emphasis is placed on the communication aspect of giving explanations and less on the reasoning aspect while the opposite seems to be true in the first and second grade curriculum[5] (ibid., p. 2165).

[5] «Tuttavia, vediamo una sottile traslazione dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria.

Oltre alla fascia di età, si ipotizza che l'uso e la frequenza di diverse funzioni della spiegazione possano dipendere anche dal contesto, dagli interlocutori e dal modo in cui vengono implementate le attività: ad esempio una stessa attività può essere proposta e formulata in modi differenti e di conseguenza suggerire funzioni diverse della spiegazione (Levenson 2013; Levenson, Barkai e Larsson 2013), oppure può coinvolgere differenti funzioni per sua natura. Citiamo ad esempio lo studio di Morselli e Levenson (2014) che riporta una dominanza delle funzioni 1, 5 e 6 della spiegazione nell'attività di discussione matematica.

3.3 Combinazione di razionalità e spiegazione

Il quadro teorico della spiegazione è stato ulteriormente raffinato dal lavoro di Morselli e Levenson (ibid.) che lo ha messo in relazione opportunamente con le dimensioni della razionalità per approcciare ed analizzare nello specifico episodi tratti da una sperimentazione realizzata in una scuola secondaria di primo grado italiana. La sperimentazione riguardava il problema dei rettangoli isoperimetrici e si inserivano all'interno del progetto «Linguaggio e Argomentazione», finalizzato appunto alla progettazione, realizzazione ed analisi di percorsi per sviluppare competente in ambito argomentativo.

Dalla ricerca emerge che alcune funzioni della spiegazione possono essere descritte e specificate declinandovi all'interno gli aspetti della razionalità, i quali sono sempre presenti e sono prerequisiti alla completezza e all'efficacia del processo di spiegazione.

3.3.1 Raffinamento della funzione 1

Nella descrizione di una procedura gli aspetti epistemici sono correlati alla correttezza matematica della stessa, gli aspetti comunicativi alla completa esplicitazione dei passaggi intermedi e quelli teleologici alla menzione dell'obiettivo e ai suoi collegamenti con le azioni intraprese.

3.3.2 Raffinamento della funzione 2

Nella risposta ad un perché esplicitare proprietà matematiche corrette manifesta aspetti epistemici, la scelta delle proprietà in relazione alla tesi si correla a quelli teleologici mentre gli aspetti comunicativi sono collegati alla organizzazione complessiva, che deve essere comprensibile.

Nella scuola dell'infanzia sembra che si ponga maggiormente l'accento sull'aspetto comunicativo della spiegazione e meno sull'aspetto di ragionamento, mentre sembra valere il contrario nel curriculum di prima e seconda primaria.»[Trad. nostra]

3.3.3 Raffinamento della funzione 4

Nell'esplorare nuove possibilità si manifesta razionalità epistemica esplicitando le proprietà matematiche, razionalità teleologica esplicitando l'obiettivo e la progettazione dell'indagine e quella comunicativa esplicitando l'esposizione complessiva e la interpretazione conclusiva.

3.3.4 Raffinamento della funzione 5

Nel difendere la ragionevolezza di una congettura non sono stati ancora descritti aspetti teleologici - per i quali la ricerca è aperta -, gli aspetti epistemici si ascrivono alla menzione delle corrette proprietà matematiche e quelli comunicativi alla esposizione, che deve essere comprensibile.

I risultati evidenziano inoltre che la razionalità degli studenti potrebbe essere sviluppata e costruita proponendo attività che sovrappongono diverse funzioni della spiegazione.

Possiamo osservare come in questo quadro combinato la consapevolezza in origine anche implicita che pervade le dimensioni della razionalità debba essere esplicitata. In altre parole affiancando i due strumenti è necessario esplicitare gli aspetti correlati alle diverse dimensioni della razionalità nelle funzioni della spiegazione coinvolte.

3.4 Domande di ricerca

Partendo dall'obiettivo generale iniziale di portare alla luce il complesso intreccio tra le due discipline - Matematica e Fisica - e di indagare come venga proposta la tematica dell'interdisciplinarità agli studenti nei testi, abbiamo deciso di affrontare questi ultimi sfruttando il quadro presentato, composto dalle lenti teoriche della razionalità di Morselli e Boero (2009) e della spiegazione di Levenson, Barkai e Larsson (2013). Formuliamo quindi le nostre domande di ricerca, che ci guideranno nello studio, in questi termini:

1. Quali funzioni della spiegazione possiamo evidenziare nei testi? Quali sono maggiormente presenti?

2. Quali dimensioni della razionalità emergono dai testi? Quali sono maggiormente presenti?

Capitolo 4

Metodologia della ricerca

Per rispondere alle nostre domande di ricerca e raggiungere i nostri obiettivi abbiamo considerato e analizzato alcuni testi di riferimento; in particolare, abbiamo letto le Indicazioni Nazionali per i licei scientifici del Ministero dell'Istruzione, cercando di individuare i possibili riferimenti alle dimensioni della razionalità, alla spiegazione e ai temi interdisciplinari in Matematica e Fisica e di inquadrare i risultati anche all'interno del «Profilo educativo, culturale e professionale dello studente liceale.»

Sono stati oggetto di analisi anche alcuni estratti dalla «Giornata Terza» di Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed i movimenti locali* e dall'inizio dell'opera di Newton, *Isaac Newton's Philosophiae naturalis Principia mathematica*: due pilastri del processo di matematizzazione della fisica e due esempi del sapere unitario e autentico, propriamente non "disciplinare"[1]. Più precisamente, abbiamo scelto di presentare e analizzare dalla «Giornata Terza» l'introduzione, la definizione e gli assiomi e il primo risultato presentato. Similmente, dai *Principia* abbiamo considerato la prefazione dell'autore, con funzione introduttiva all'opera, alcuni passi tratti dalle definizioni e dalle leggi del moto, e il primo corollario derivato. La scelta di questi estratti è stata fatta in relazione all'obiettivo di presentare non (solo) come vengono definiti e analizzati i concetti relativi al moto dei proiettili a livello onto-epistemologico (per cui si rimanda all'analisi dei passi tratti dalla «Giornata Quarta» di Branchetti, Bagaglini et al. (2021)), ma innanzitutto come il discorso e le argomentazioni vengono costruiti a livello esplicativo (indipendentemente dall'argomento) e presentati all'interno di un testo che non ha né obiettivo didattico né concezione settoriale dei saperi.

Per rendere accessibili i testi storici alla lettura e all'analisi con gli strumenti teorici ne abbiamo curato in prima persona la traduzione, riportata nelle relative sezioni del capitolo 5; sebbene il nostro obiettivo non fosse un'analisi di tipo puramente linguistico, per la quale si rimanda ai metodi e

[1]Qui intendiamo il termine "disciplina" accogliendo la proposta di Branchetti, Bagaglini et al. (2021, p. 1), ossia una «riorganizzazione della conoscenza ai fini dell'apprendimento.»

ai risultati presentati in Gombi (2020) e in Branchetti, Bagaglini et al. (2021), abbiamo ritenuto necessaria questa scelta per poter entrare in contatto direttamente con l'originale storico, senza mediazioni linguistiche di terzi. La fedeltà al modello storico è stata il criterio di riferimento nella redazione della traduzione e ci ha permesso di apprezzare i termini, la struttura della frase e i concetti veicolati nella genesi dall'autore. Gli originali dei testi storici si possono trovare rispettivamente nelle appendici A.1 e A.2.

L'aspetto comunicativo[2], è stato comunque la prima dimensione analizzata e presa in considerazione in quanto, come già sottolineato da Habermas (2001), costituisce il mezzo più evidente attraverso cui avviene la costruzione del sapere.

Avendo studiato le parti introduttive delle opere di Galilei e di Newton, riguardo gli aspetti della razionalità di Morselli e Boero (2009) e alle funzioni della spiegazione di Levenson, Barkai e Larsson (2013) ci aspettiamo di trovare predominanti le dimensioni comunicativa e teleologica, in quanto sarà necessario esplicitare le scelte strategiche future e organizzare l'esposizione in modo comprensibile alla comunità lettrice. Oltre a questo, ci attendiamo eventualmente anticipazioni della funzione 1 e 2 della spiegazione, in quanto sarà obiettivo degli autori la descrizione e la dimostrazione delle osservazioni dai principi assunti.

Infine, ci siamo concentrati su un manuale disciplinare, ossia *La fisica di Amaldi*, che rappresenta per noi un esempio di trasposizione didattica della Fisica, da una parte estremamente comune nelle scuole e dall'altra non ancora considerato nei lavori di Gombi (2020) e di Branchetti, Bagaglini et al. (2021). Da questo abbiamo analizzato il capitolo relativo al moto dei proiettili: un tema che oltre ad essere "curricolarmente" rilevante è anche già stato studiato e approfondito epistemologicamente e linguisticamente (Gombi 2020; Branchetti, Bagaglini et al. 2021). Sarà quindi nostra preoccupazione presentare e consolidare i risultati da noi ottenuti integrandoli all'interno di quelli evidenziati dal progetto IDENTITIES. Questo estratto riguardante il moto parabolico è stato analizzato in modo approfondito, utilizzando il quadro teorico presentato nel capitolo 3, per ricercare la presenza di aspetti razionali ed esplicativi, senza quindi tenere in considerazione elementi né linguistici, come ad esempio l'impostazione delle pagine, il lessico usato, il ruolo delle immagini o degli esempi, né didattici come le difficoltà che possono emergere nell'apprendimento dei concetti da parte dello studente.

In generale, condurremo quindi la nostra analisi evidenziando prima gli aspetti comunicativi notevoli, andando poi ad indagare la presenza eventuale delle radici epistemiche e teleologiche e come queste tre dimensioni della razionalità dialoghino con le funzioni della spiegazione. Infine, potremo integrare con alcune considerazioni di carattere euristico sul ruolo complessivo

[2]Abbiamo indagato questa dimensione evitando un'analisi linguistica dettagliata in quanto esula dai nostri obiettivi. Tuttavia, per approfondimenti si possono trovare metodi e applicazioni in Gombi (2020) e in Branchetti, Bagaglini et al. (2021).

che emerge tra Matematica e Fisica, per completare l'immagine complessiva delle due discipline e della loro interazione nel testo.

Capitolo 5

Analisi

In questo capitolo presentiamo quanto emerge dall'uso delle lenti di Morselli e Boero (2009) e di Levenson e Barkai (2013), presentate nel capitolo precedente, sui testi a nostra disposizione. Con questo obiettivo il capitolo si suddivide in quattro parti. Nella prima sezione analizziamo il riferimento normativo attuale delle Indicazioni Nazionali redatte dal Ministero dell'Istruzione (2010). Nella seconda sezione esaminiamo l'inizio della «Giornata Terza» di Galilei (1990) che tratta, dopo un'introduzione, del moto locale e in particolare del moto uniforme. Nella terza sezione consideriamo alcuni passi tratti da Newton (1972) che ci permetteranno di avere un riferimento storico, assieme a Galileo, in cui il sapere viene affrontato e considerato come unitario e incontaminato dalla proiezione didattica disciplinare. Infine, nell'ultima sezione ci concentreremo sul capitolo intitolato «Il moto dei proiettili», tratto da Amaldi (2007): un libro di testo per i licei il cui obiettivo, come si apprende dalla quarta di copertina, è «comunicare i concetti fondamentali senza dilungarsi in dettagli non essenziali», per studiare come viene presentato il sapere disciplinare allo studente.

5.1 I documenti ministeriali

Nella progettazione e nei contributi di analisi di questa ricerca abbiamo sentito il bisogno di fare riferimento anche alle Indicazioni Nazionali per i licei redatte dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca in collaborazione con il Ministero dell'Economia e delle Finanze, ed entrate ufficialmente in vigore il 29 dicembre 2010[1], visto che uno degli obiettivi era l'analisi diretta del testo Amaldi (ibid.) per l'insegnamento liceale della Fisica. Abbiamo quindi cercato possibili collegamenti con il comportamento e le dimensioni razionali di Morselli e Boero (2009), con le possibili funzioni e forme di spiegazione tenendo come riferimento l'articolo di Levenson, Barkai e Larsson (2013) e, più in generale, con il rapporto tra Matematica e Fisica.

[1]Si veda Ministero dell'Istruzione (2010).

Nella lettura ci siamo volutamente ristretti alle Indicazioni del Ministero dell'Istruzione relative ai licei scientifici, considerate a titolo esemplificativo in quanto, secondo noi, dovrebbero essere maggiormente sensibili alle tematiche riguardanti discipline come Matematica e Fisica rispetto ad altri licei. Si legge infatti nel Decreto del Presidente della Repubblica (abbr. DPR) del 15 marzo 2010, n. 89, articolo 8, comma 1 che

> [i]l percorso del liceo scientifico [. . .] [f]avorisce l'acquisizione delle conoscenze e dei metodi propri della matematica, della fisica e delle scienze naturali [. . .] per individuare le interazioni tra le diverse forme del sapere, assicurando la padronanza dei linguaggi, delle tecniche e delle metodologie relative[2].

5.1.1 La razionalità nelle Indicazioni Nazionali

Per quanto riguarda il comportamento razionale, emergono riferimenti espliciti nell'articolo 2 «Identità dei licei» del DPR 15 marzo 2010 n.89, dove si legge:

> I percorsi liceali forniscono allo studente gli strumenti culturali e metodologici per una comprensione approfondita della realtà, affinché egli si ponga, con *atteggiamento razionale*, creativo, progettuale e critico, di fronte alle situazioni, ai fenomeni e ai problemi[3]. [Cors. agg.]

Ci è parso degno di nota che il termine "razionale" compaia esplicitamente nelle Indicazioni nazionali *solo* nelle «Linee generali e competenze» in Filosofia (e non in Matematica) dove si evidenzia che

> [g]razie alla conoscenza degli autori e dei problemi filosofici fondamentali lo studente ha sviluppato la *riflessione personale*, il *giudizio* critico, l'attitudine all'approfondimento e alla discussione *razionale*, la *capacità di argomentare* una tesi, anche in forma scritta, riconoscendo la diversità dei metodi con cui la *ragione* giunge a conoscere il reale (Ministero dell'Istruzione 2010, p. 305). [Cors. agg.]

Da queste due occorrenze sembra emergere dai documenti ministeriali ufficiali italiani che delle dimensioni della razionalità di Habermas (2001) come declinate in Morselli e Boero (2009) sopravviva solo la componente di consapevolezza interiore delle azioni intraprese dallo studente.

Per quanto riguarda la componente comunicativa, questa verrà trattata in seguito inglobandola con la funzione 6 del quadro proposto da Levenson, Barkai e Larsson (2013).

[2]Si veda DPR 15 marzo 2010, n.87-89 p. 93
[3]Si veda DPR 15 marzo 2010, n.87-89 p. 91

5.1.2 La spiegazione nelle Indicazioni Nazionali

Dalle «Linee generali e competenze» possiamo evincere che lo statuto epistemico della Fisica, ossia l'insieme dei «[suoi] contenuti, [delle sue] procedure euristiche, [del suo] linguaggio», è costituito dalle seguenti competenze:

> [O]sservare ed identificare fenomeni; formulare ipotesi *esplicative* utilizzando modelli, analogie e leggi; formalizzare un problema di fisica e applicare gli strumenti matematici e disciplinari rilevanti per la sua risoluzione; fare esperienza e rendere ragione del significato dei vari aspetti del metodo disciplinare (Ministero dell'Istruzione 2010, p. 312). [Cors. agg.]

Il termine "esplic(it)are" rimanda etimologicamente al campo semantico della spiegazione, e in effetti ne è affine[4]. Con questa osservazione si può rileggere il secondo aspetto dello statuto dicendo che sono le leggi e le teorie della Fisica che *esplicitano*, cioè spiegano, i concetti fondamentali.

Negli «Obiettivi specifici di apprendimento» in Fisica si legge:

> Nel primo biennio si inizia a costruire il linguaggio della fisica classica [...], abituando lo studente a semplificare e modellizzare situazioni reali[...] Al tempo stesso gli esperimenti di laboratorio consentiranno [...] allo studente di esplorare fenomeni [...] e di descriverli con un linguaggio adeguato [...]. Attraverso lo studio dell'ottica geometrica, lo studente sarà in grado di interpretare i fenomeni della riflessione e della rifrazione della luce [...]. I temi suggeriti saranno sviluppati [...] con un ordine coerent[e] con gli strumenti concettuali e le conoscenze matematiche già in possesso degli studenti. Nel secondo biennio [...] [si] darà maggior rilievo all'impianto teorico [...] e alla sintesi formale (strumenti e modelli matematici) [...]. Inoltre, l'attività sperimentale consentirà allo studenti di discutere e costruire concetti[...]. L'approfondimento del principio di conservazione dell'energia meccanica [...] permetter[à] allo studente di rileggere i fenomeni meccanici mediante grandezze diverse e di estenderne lo studio ai sistemi di corpi. [...] Lo studio dei fenomeni elettrici e magnetici permetterà allo studente di esaminare criticamente il concetto di interazione a distanza[...]. Lo studente completerà lo studio dell'elettromagnetismo [...] per giungere [...] alla sintesi costituita dalle equazioni di Maxwell. [...] L'insegnante dovrà prestare attenzione a utilizzare un formalismo matematico accessibile agli studenti, ponendo sempre in evidenza i concetti fondanti. [...] l'aver affrontato l'equivalenza massa-energia gli permetterà di sviluppare un'interpretazione energetica dei fenomeni nucleari (ibid., pp. 312–314).

[4]Si apprende dalla voce «[e]splicare» nel sito etimo.it che il termine è «[l]o stesso che [s]piegare,» nel senso figurato di «[d]ichiarare in modo aperto, [...] [per] non dare campo all'interpretazione.»

Tenendo conto anche delle «Linee generali e competenze» in Fisica possiamo, a nostro avviso, distinguere quindi due dimensioni rispetto alla spiegazione, ossia:

- Una dimensione *oggettiva*, in cui bisogna «[descrivere] con un linguaggio adeguato», e quindi si trovano termini come formalizzare, osservare, formulare, sintetizzare, generalizzare e modellizzare.

- Una dimensione *soggettiva*, in cui è necessario «rendere ragione del significato», e quindi interpretare, rileggere (mediante), discutere ed esaminare criticamente, possibilmente rielaborando esperimenti[5] anche in ottica puramente matematica, con il risultato di nuove formulazioni e congetture.

Laddove nell'aspetto soggettivo vediamo intrecciati il pensiero di Uhden et al. (2011) e la funzione 3, interpretativa, di Levenson, Barkai e Larsson (2013), nella dimensione oggettiva possiamo ritrovare la funzione 1, descrittiva, di Levenson, Barkai e Larsson (ibid.), la funzione 2, argomentativa/dimostrativa e l'idea espressa da Gingras (2001), come citata in Uhden et al. (2011), per cui la matematizzazione - nel suo aspetto di modellizzazione e formalizzazione - della Fisica (tra altri due effetti, sociale ed ontologico), *trasla* il significato della spiegazione dall'uso di meccanismi fisici al bisogno di formulazioni e formalizzazioni matematiche (un bisogno emerso già in Galileo e in Newton, che si propongono di inserire le loro osservazioni in un ragionamento ipotetico-deduttivo[6]). D'altra parte Zahar (1980), come citato in Uhden et al. (2011), osserva che inquadrare un principio fisico (ingenuo) in una struttura matematica permetta di (modificarlo e) di rafforzarlo.

Ci sembra notevole osservare che, a differenza di quanto sostenuto nell'articolo di Karam (2015, p. 490), cioè che ci sia una dicotomia «*mathematical rigor* versus *physical intuition*»[Cors.d.A.], dai documenti ministeriali ufficiali italiani (per i licei scientifici) l'aspetto formale e rigoroso ascritto alla Matematica emerge non tanto dagli Obiettivi per la Matematica quanto da quelli per la Fisica[7]. Questo è in linea con il lavoro di Redish (2006), citato

[5] Etimologicamente *esperimento* si collega al greco πειράω che significa "intraprendo una prova, tento." Dall'enciclopedia treccani.it si possono apprendere le finalità dell'esperimento. Dal testo di Giusti (1990, p. XXVII) emergono due sue funzioni: «dimostrare una legge [fisica] già conosciuta» e «estrarne una dai dati sperimentali.»

[6] Si veda a questo proposito il testo di Giusti (ibid., p. XII): «[l'elaborazione galileiana costituisce] il primo esempio compiuto di trattazione quantitativa, geometrica, dei problemi fisici [. . .] che [. . .] troverà con Newton la sua affermazione definitiva.»

[7] Più precisamente il termine (e derivati) "formalizzare" compare due volte nelle Indicazioni per la Matematica mentre compare cinque volte in quelle per la Fisica. Diverso è l'uso del termine "rappresentare", che compare venti volte in Matematica e nessuna in Fisica. In effetti, la Matematica emerge principalmente come strumento per rappresentare, descrivere, analizzare, manipolare, dimostrare, risolvere, ottenere informazioni, calcolare, riconoscere, studiare e prevedere. Siamo ancora lontani da una meta-Matematica universitaria in cui la Matematica viene considerata un oggetto di studio.

in Uhden et al. (2011), secondo cui usare la Matematica in Fisica è semanticamente diverso da fare semplicemente Matematica, più precisamente in Karam (2015) si afferma che i fisici creano significati con la Matematica in modo diverso da come fanno i matematici stessi[8]. Questo tema sarà ripreso anche nel paragrafo successivo.

Inoltre, a nostro avviso possiamo inserire nell'intersezione delle due dimensioni, oggettiva e soggettiva, la funzione 4, esplorativa, della spiegazione: infatti, ritroviamo nell'aspetto oggettivo la generalizzazione e modellizzazione mentre nella parte soggettiva, l'approdo verso nuove ipotesi, entrambi compresi nella descrizione data da Levenson, Barkai e Larsson (2013).

Per quanto riguarda l'aspetto comunicativo della razionalità e la funzione 6 della spiegazione è importante far riferimento al «Profilo educativo, culturale e professionale dei Licei»[9], in cui troviamo tra i capisaldi della tradizione degli studi liceali che permettono il raggiungimento degli obiettivi «la pratica dell'argomentazione e del confronto; la cura di una modalità espositiva scritta ed orale corretta, pertinente, efficace e personale»[10]. Possiamo ascrivere agli aspetti comunicativi anche parte dei risultati comuni di apprendimento; in particolare, nell'area «logico-argomentativa» si legge che lo studente deve

> *[s]aper sostenere una propria tesi* e saper ascoltare e *valutare criticamente* le argomentazioni altrui. Acquisire l'abitudine a *ragionare con rigore logico*, ad identificare i problemi e a *individuare possibili soluzioni*. Essere in grado di *leggere e interpretare criticamente* i contenuti delle diverse forme di comunicazione (ibid., p. 98) [Cors. agg.]

e nell'area, appunto, «linguistica e comunicativa» si legge che lo studente, nel padroneggiare la lingua italiana, deve in particolare «curare l'esposizione orale e saperla adeguare ai diversi contesti»[11]. Infine nell'area «scientifica, matematica e tecnologica» si legge che lo studente deve in particolare «comprendere il linguaggio formale specifico della matematica»[12] In questi passi troviamo, oltre alla dimensione comunicativa, anche sfumature della funzione 4 e della componente di ragionamento razionale (si veda «con rigore logico»). Più sotto si esplicita che uno dei criteri costitutivi delle Indicazioni è la competenza linguistica, in cui ricade la «capacità di esprimersi ed argomentare in forma corretta e in modo efficace»[13]. Non passi inosservato che tra le otto competenze di cittadinanza, riportate in Ministero dell'Istruzione (2010, p. 6), la terza è proprio «comunicare.»

[8]«"[M]ath in math" and "math in physics" are like *different languages*» [Cors.d.A.] (Karam 2015, p. 489).

[9]Si veda DPR 15 marzo 2010, n.87-89 p. 97

[10]ibid., p. 97

[11]ibid., p. 98

[12]ibid., p. 100

[13]Ministero dell'Istruzione 2010, pp. 7–8

5.1.3 Il rapporto tra Matematica e Fisica nelle Indicazioni Nazionali

Oltre ai riferimenti alle dimensioni della razionalità e alla spiegazione, ci siamo concentrati anche su quale quale visione dell'interdisciplinarità, in particolare tra Matematica e Fisica, si può trarre dai documenti ministeriali ufficiali. Nell'area metodologica dei risultati comuni di apprendimento si vede che lo studente deve «essere consapevol[e] della diversità dei metodi utilizzati dai vari ambiti disciplinari [...] [e] [deve s]aper compiere le necessarie interconnessioni tra i metodi e i contenuti delle singole discipline»[14]. Nelle Indicazioni si apprende anche che costituisce un criterio costitutivo «la rivendicazione di una unitarietà della conoscenza»[15] e

> [l]'enfasi sulla necessità di *costruire, attraverso il dialogo tra le diverse discipline, un profilo coerente e unitario dei processi culturali*. Se progettare percorsi di effettiva intersezione tra le materie sarà compito della programmazione collegiale dei dipartimenti disciplinari e dei consigli di classe, le Indicazioni sottolineano tuttavia i punti fondamentali di convergenza, i momenti storici e i nodi concettuali che richiedono l'*intervento congiunto di più discipline* per essere compresi nella loro reale portata (Ministero dell'Istruzione 2010, p. 7). [Cors. agg.]

Nello specifico, analizzando le Indicazioni relative a Matematica e Fisica, possiamo distinguere in estrema sintesi due versanti dell'uso della Matematica in Fisica

- Come strumento efficace di «sintesi formale»[16] per una rappresentazione concisa e precisa (Uhden et al. 2011).
- Come arsenale di tecniche esistenti indipendentemente per risolvere problemi.

Riteniamo che la sintesi efficace si realizzi pienamente con l'uso, la costruzione e l'analisi di modelli, un concetto intrinsecamente ibrido, di intersezione tra i due domini, di interdisciplinarità, descritto da Blum e Borromeo Ferri, citati in Uhden et al. (ibid.), come il processo di traslazione tra mondo reale e Matematica e viceversa[17]. Nello statuto epistemico della Fisica il modello viene sfruttato per spiegare, più precisamente per formulare ipotesi.

Uno strumento potente, a nostro avviso non adeguatamente enfatizzato (e forse spesso s(otto)valutato) è l'analogia (anche solo puramente formale)

[14]Si veda DPR 15 marzo 2010, n.87-89 p. 98

[15]Ministero dell'Istruzione 2010, p. 7

[16]Un esempio esplicito di realizzazione sono le equazioni di Maxwell indicate tra gli «Obiettivi specifici per il quinto anno» in Fisica, riportati in Ministero dell'Istruzione (ibid., pp. 313–314).

[17]Per approfondire questo aspetto si veda la nota 2 in Uhden et al. (2011, p. 487).

come mezzo di modellizzazione e, soprattutto, come generatore di conoscenza (avendo in mente il «creative power of formal analogies» di Kragh citato da Karam (2015, p. 488)).

Dal documento ministeriale[18] si può notare come vi sia un sottoinsieme degli strumenti matematici ritenuti «più adatti» allo studio della Fisica, ossia quelli le cui radici affondano storicamente in problemi fisici, come ad esempio il calcolo vettoriale e le equazioni differenziali[19]. In effetti Kline (1981), come citato da Karam (2015, p. 489), si spinge oltre osservando che i principali concetti matematici sono stati derivati proprio dallo studio della natura.

Concordiamo sull'opinione generale, di cui fa parte anche Uhden et al. (2011), che annovera tra le funzioni della Matematica in Fisica non solo quella strumentale esterna (utile), ma anche quella razionale e linguistica di un linguaggio della natura che, nella sua essenza anche etimologica, necessariamente permea tutta la Fisica (dal greco φύσις) nella sua continua indagine del mondo reale. Identificare il ruolo della Matematica con le sole tecniche di calcolo, pensando la Matematica come ad una "cassetta degli attrezzi", rischia di compromettere irrimediabilmente non solo l'efficacia di un insegnamento epistemico della Fisica, come si propone il documento ministeriale, ma l'immagine stessa del sapere agli *oculi rasi* degli studenti, e non solo. Non sarà sfuggito il fatto che la Matematica entri in gioco nello statuto epistemico della Fisica, come presentato dalle Indicazioni, implicitamente con il modello ed esplicitamente (solo) con l'applicazione degli strumenti per risolvere. Si rafforza quindi l'idea espressa da Hudson e McIntire, citati in Uhden et al. (ibid.), secondo cui avere competenze adeguate e consapevoli in Matematica è condizione necessaria (ma non sufficiente) per averne in Fisica. Viceversa non bisogna monopolizzare il fatto che

> [i]l contemporaneo [alla matematica] studio della fisica *offrirà esempi* di funzioni che saranno oggetto di una specifica trattazione matematica, e i risultati di questa trattazione serviranno ad approfondire la comprensione dei fenomeni fisici e delle relative teorie (Ministero dell'Istruzione 2010, p. 309). [Cors. agg.]

Per evitare, o per superare, il paradigma *plug-and-chug* che deriva da queste concezioni distorte del rapporto tra Matematica e Fisica bisogna spostare il focus delle domande da por(si), sostituendo "calcola e descrivi" con "spiega e comprendi", come suggerisce Karam (2015) in riferimento alle equazioni. In questo contesto i due termini *descrivere* e *spiegare* vengono proposti in modo leggermente antitetico, più precisamente il secondo è un raffinamento concettuale del primo, in linea con il pensiero di Levenson, Barkai e Larsson (2013), pur di intendere lo *spiegare* nel senso di spiegare le ragioni.

[18] Si vedano le «Linee generali e competenze» in Matematica riportate in Ministero dell'Istruzione (2010, pp. 307–308).

[19] In Uhden et al. (2011, p. 488) si aggiungono anche, ad un livello superiore, l'analisi matematica, l'analisi di Fourier e la teoria delle distribuzioni.

Sebbene i riferimenti impliciti siano molteplici, la realizzazione effettiva della dimensione interdisciplinare, citata in Ministero dell'Istruzione (2010, p. 312) come «raccordo [altrove si trova anche collegamento] con altri insegnamenti», sia delegata a «la libertà, la competenza e la sensibilità dell'insegnante,» che non deve mai sottovalutare l'aspetto cronologico, «secondo le modalità e con un ordine coerenti con [. . .] le conoscenze matematiche già in possesso degli studenti,» e più sotto «[usando] un formalismo matematico accessibile agli studenti.»

5.2 Dalla «Giornata Terza» di Galilei: i «nuovi rudimenti»

I successivi brani riportati costituiscono l'inizio della «Giornata Terza» dell'opera intitolata *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed i movimenti locali*. Questo libro, che si struttura nella forma di un dialogo a tre voci articolato in quattro «giornate», cerca di organizzare, per quanto possibile, le osservazioni, gli esperimenti, le dimostrazioni su cui Galileo aveva lavorato per anni, in modo che nulla vada perduto delle fatiche sopportate. Le prime due giornate sono dedicate al problema della resistenza dei corpi alla frattura, mentre le ultime due si concentrano sul moto dei gravi; più precisamente, la terza giornata, che in parte andremo a riportare, si occupa del «moto equale, o uniforme» e del «moto uniformemente accelerato» e la quarta tratta del «moto violento, o dei [corpi] proietti.» Queste ultime due giornate sono particolarmente notevoli non solo per la «nuovissima conoscenza» che promuovono ma anche per come approcciano un sapere unitario e non contaminato dalla proiezione disciplinare didattica, mostrando il primo esempio di matematizzazione della fisica in termini quantitativi e geometrici (Giusti 1990).

La parte riguardante il moto equabile, a parte l'ultimo intervento conclusivo di Salviati, è la prima che compare nei Discorsi interamente scritta in latino, una lingua che dà una impostazione schematica e autorevole e che sottolinea, per così dire, l'irruzione delle novità proposte da Galileo.

Il resto della sezione sarà dedicato alla lettura e all'analisi dell'inizio della «Giornata Terza»; in particolare, presenteremo l'introduzione che anticipa la «nuovissima conoscenza» sui moti, la presentazione della definizione e degli assiomi necessari allo sviluppo della teoria matematica soggiacente e il primo risultato ottenuto e dimostrato da Galileo.

5.2.1 L'introduzione

Iniziamo la lettura dei passi tratti dalla «Giornata Terza» sul moto locale riportando di seguito il testo tradotto dell'introduzione di Galileo:

GIORNATA TERZA

> SUL MOTO LOCALE
>
> Sviluppiamo una nuovissima conoscenza scientifica riguardo un soggetto antichissimo. Forse in natura [non esiste] nulla di più antico del MOTO [Maius.d.A.]; e su di esso si trovano né pochi né piccoli volumi composti da filosofi. Tuttavia tra i sintomi[20], che molti e degni di essere conosciuti sono insiti in esso [nel moto], [ne] scopro finora inosservati e tanto meno dimostrati. Se [ne] osservano alcuni più leggeri: come per esempio, che il moto naturale dei gravi discendenti acceleri continuamente. In realtà, secondo quale proporzione sia fatta l'accelerazione di quel [moto], non è stata mostrata fino a questo punto: infatti nessuno, che io sappia, ha dimostrato, che gli spazi percorsi in tempi uguali da un mobile discendente dalla quiete mantengono il rapporto che hanno i numeri dispari successivi all'unità. È stato osservato che i corpi lanciati, o proietti, tracciano una linea curva in un qualche modo; ma nessuno ha mostrato che quella sia una parabola. Saranno dimostrati da me questi fatti, e altri non pochi, e né meno degni di essere conosciuti: e, [fatto] che ritengo più necessario, si aprirà l'accesso ad una importantissima e notevolissima conoscenza scientifica, di cui queste nostre fatiche saranno i rudimenti: nella quale [conoscenza] ingegni più perspicaci del mio entreranno nei nascondigli più segreti.
>
> Dividiamo in tre parti questa trattazione. Nella prima parte consideriamo quei [fatti] che riguardano il moto equabile, o uniforme. Nella seconda descriviamo il moto naturalmente accelerato. Nella terza [descriviamo] il moto violento, o dei proietti. [Trad. nostra]

Nel passo precedente possiamo vedere tutta la potenza comunicativa introdotta da Galileo a partire già dalla prima frase, che contiene una forte antitesi tra due aggettivi superlativi che segnano il tempo, ossia «*nuovissima*» e «*antichissima*.»

Questo *incipit* si configura in termini moderni esattamente come l'*abstract* di un articolo di ricerca. Per evidenziare maggiormente gli aspetti a sostegno di questa affermazione abbiamo usato colori differenti nella nostra traduzione, che corrispondono a momenti e scopi differenti di un *abstract* moderno (ossia l'introduzione, i metodi, i risultati e le conclusioni).

Visto il riferimento ai «né pochi né piccoli volumi composti da filosofi», possiamo ascrivere la frase evidenziata in blu alla presa di consapevolezza della (vasta e corposa) letteratura presente sull'argomento «moto» affrontato da Galileo.

Tuttavia, Galileo stesso (si veda la traslazione di soggetto da *noi* a *io*) constata nel testo evidenziato in rosso (con sorpresa, visto l'inciso «che molti e degni di essere conosciuti sono insiti in esso [nel moto]») che alcuni fenomeni *leviora*, cioè leggerissimi, rimangono non solo non dimostrati (sistematicamente in modo matematico) ma nemmeno osservati, indice di lacune nel

[20]Nella lettera del 16 Ottobre 1604 a Paolo Sarpi, come citata da Giusti (1990), e anche successivamente nel testo di Galilei (1990), Galileo parla in effetti di *accidenti*. Abbiamo tuttavia scelto il termine "sintomo" nella nostra traduzione in quanto ricalca il corrispondente *symptoma* latino.

sapere. Concordiamo con l'osservazione di Giusti (1990) secondo cui l'obiettivo di Galileo, per così dire la sua domanda di ricerca, sia non tanto la scoperta delle leggi a cui sottostà il moto (in particolare il moto uniformemente accelerato), che già conosce, quanto più un loro inquadramento teorico in una struttura ipotetico-deduttiva consistente in cui, a partire da assiomi e definizioni opportuni, si «rend[a] conto dei principali fenomeni osservati.» L'obiettivo di Galileo non è dunque quello di persuadere il lettore, che può convincersi osservando direttamente i fatti evidenti, ma dimostrare, in senso proprio, i rapporti, le uguaglianze e le disuguaglianze tra le grandezze in gioco (spazio, tempo e velocità): a differenza del moto equabile, il moto uniformemente accelerato sarà introdotto e sviluppato socraticamente attraverso il dialogo tra i protagonisti, evidenziando una componente maggiormente argomentativa e giustificativa.

Si osservi il dualismo di complementarità che Galileo propone tra la dimensione fenomenologica dell'osservazione e quella formale della dimostrazione, termini che nell'introduzione di Galilei compaiono tre volte (opportunamente variati e declinati).

Tra le mancanze riguardanti il moto, Galileo ne individua in particolare due che vuole contribuire a colmare personalmente, come si evince dal testo in verde: la legge di proporzionalità (dei numeri dispari, ibid.) che lega ai tempi gli spazi percorsi da un corpo in caduta libera e la natura della linea (parabolica) tracciata dai corpi proietti.

Segue un lungo periodo in magenta che contiene due aspetti importanti. Il primo, enfatizzato dall'endiadi e dai gradi superlativi assoluti «importantissima e notevolissima», è la tradizione in cui Galileo vuole inserire le proprie fatiche (o quantomeno la terza e la quarta giornata), ossia quella di stampo euclideo. Questa ipotesi ci sembra fortemente suggerita nella scelta di Galileo di usare *elementa*, da noi tradotto con *rudimenti*, per indicare la sistematizzazione proposta; secondo noi il termine si pone come "nuovi" στοιχεία a cui Galileo apre le porte.

La scelta consapevole di Galileo del modello euclideo, pur rimanendo a tutti gli effetti implicita, secondo noi è ascrivibile a un aspetto di razionalità epistemica nel quadro proposto da Morselli e Boero (2009). Del resto, in Giusti (1990) l'autore afferma che:

> [-] Archimede insegna - non c'è altro modo di trattare matematicamente (dunque geometricamente) delle grandezze, [...] che inquadrandole nello schema delineato nel V e VI libro degli Elementi di Euclide [ossia nella teoria delle proporzioni] (ibid., p. XXVIII).

In Giusti (1993, p. 2) si sostiene inoltre che

> [la teoria delle proporzioni sia] il linguaggio naturale per la filosofia naturale matematizzata [...] che troverà in Galileo la prima realizzazione compiuta.

Il secondo aspetto importante contenuto nel periodo è lo spazio che Galileo lascia a «ingegni più perspicaci del [suo]», alla *future research*, consapevole che la conoscenza non è esaurita e ci sono ancora «segrete» da esplorare, se pensiamo il sapere come un castello o una costruzione da perlustrare.

Conclude l'introduzione alla terza giornata un breve indice di come si articolerà la trattazione.

In riferimento al quadro teorico di Levenson, Barkai e Larsson (2013) quest'introduzione alla teoria galileiana del moto anticipa sicuramente una successiva funzione 2 della spiegazione, essendoci molti richiami alla volontà di osservare e, soprattutto, di dimostrare quanto ancora manca.

Emergono da questo passo anche gli aspetti dello statuto epistemico della Fisica relativi all'osservazione dei fenomeni e alla loro identificazione (si veda ad esempio «i corpi lanciati [...] tracciano una [qualche] linea curva»), alla congettura di un modello esplicativo (la linea curva è una parabola) e alla loro formalizzazione applicando gli strumenti adeguati (la congettura verrà dimostrata formalmente in un sistema ipotetico-deduttivo tramite la teoria delle proporzioni).

La matematica emerge con funzione strutturale per identificare e "spiegare", nel senso di interpretare in linguaggio matematico, i fenomeni naturali (la proporzione tra spazi e tempi è la stessa dei numeri dispari maggiori di 1, la curva è una parabola). In questa funzione strutturale possiamo forse ritrovare la funzione 3 della spiegazione, ma "in senso contrario", ossia dal linguaggio quotidiano al linguaggio matematico.

Più precisamente, potremo riferirci al quadro integrato di Morselli e Levenson (2014), andando ad evidenziare l'eventuale presenza di aspetti razionali laddove ci siano espliciti e consapevoli richiami alle proprietà matematiche corrette, scelte in modo efficiente ed efficace per conseguire l'obiettivo (dimostrare la tesi) e organizzate consapevolmente in modo comprensibile per essere condivise con la comunità matematica contemporanea a Galileo. Sul piano comunicativo Galileo evidenzia subito un punto di rottura sia all'interno del testo stesso (in cui si passa dalla resistenza dei corpi alla frattura alla teoria del moto, dalla lingua volgare alla lingua latina) sia, *a posteriori*, nello sviluppo storico-epistemologico della conoscenza, coerentemente con quanto affermato da Giusti (1990):

> [L]a teoria meccanica rappresenta la separazione definitiva tra la teoria aristotelica e quella galileiana; quest'ultima cessa di essere esclusivamente una dinamica, e cioè una teoria fisica dei moti e delle loro cause, per divenire una cinematica, ovvero una teoria matematica capace di previsione quantitativa e soggetta a verifica sperimentale (ibid., p. XXIII).

Sottolineiamo come il parallelismo linguistico tra il latino galileiano *elementum* e il greco euclideo στοιχεῖον manifesti una forte interazione tra le dimensioni della razionalità comunicativa e teleologica nel quadro di Morselli e Boero (2009): la teoria galileiana poggerà infatti le fondamenta sulla teoria eudossiana delle proporzioni, tramandata nei libri V e VI degli Elementi di Euclide.

5.2.2 La definizione e gli assiomi

Per proseguire la presentazione e la sistematizzazione dei risultati ottenuti, Galileo introduce un'unica definizione di cui avrà bisogno e quattro assiomi che da essa dipendono e che descrivono come entrino in gioco le grandezze coinvolte.

Questa impostazione, oltre a manifestare aspetti dello statuto epistemico della matematica (definizioni e assiomatizzazioni), prosegue in parallelo con il testo di Euclide, in cui si trovano ὅρος (tradotto con «termine» in Euclide (2007)) e κοινή ἔννοια (tradotto con «nozione comune» in Euclide (ibid.)) al posto rispettivamente di *definitio* e *axioma*.

Di seguito riportiamo la nostra traduzione delle definizioni e degli assiomi introdotti:

> Sul moto equabile
> Riguardo il moto equabile, o uniforme abbiamo bisogno di una sola definizione, che presento così.
> DEFINIZIONE.
> Penso il moto equale, o uniforme, quello, le cui parti, percorse in qualsivoglia tempi uguali, sono tra loro uguali.
> AVVISO.
> [Ci] è sembrato opportuno aggiungere alla vecchia definizione (che semplicemente chiamava un moto equabile finché spazi uguali sono attraversati in tempi uguali) un particolare, in *qualsivoglia* [Cors.d.A.], cioè in tutti i tempi uguali: può accadere infatti, che in alcuni tempi uguali il mobile attraversi spazi uguali, mentre tuttavia gli spazi attraversati in parti più piccole degli stessi tempi, sebbene uguali, uguali non siano. Dalla definizione portata dipendono quattro assiomi, appunto:
> ASSIOMA I.
> Che lo spazio attraversato in un tempo più lungo in uno stesso moto equabile è maggiore dello spazio attraversato in un tempo più breve.
> ASSIOMA II.
> Il tempo, con cui si compie uno spazio più grande, in uno stesso moto equabile è più lungo del tempo, con cui si compie uno spazio più piccolo.
> ASSIOMA III.
> Lo spazio compiuto da una velocità più grande in uno stesso tempo è più grande dello spazio compiuto da una velocità più piccola.
> ASSIOMA IV.
> La velocità, con cui in uno stesso tempo si compie uno spazio più grande, è più grande della velocità, con cui si compie uno spazio più piccolo. [Trad. nostra]

In questo passo si inizia a concretizzare la struttura matematica rigorosa in cui Galileo vuole inserire la teoria del moto. Possiamo osservare come logicamente gli assiomi si distinguano in modo naturale in due gruppi: i primi due assiomi, che riguardano le relazioni di disuguaglianza tra spazi e tempi, concorrono a stabilire l'equivalenza logica tra il piano dello spazio e quello del tempo, nelle ipotesi che il moto sia equabile. Con questo vogliamo intendere che i primi due assiomi sono equivalenti, sotto l'ipotesi di moto equabile, in termini moderni al seguente enunciato

$$\forall_{t_1,t_2}\,\forall_{s_1,s_2}\,(t_1 > t_2 \iff s_1 > s_2)$$

L'identificazione proposta rimane volutamente solo a livello puramente logico e va intesa come un tentativo di astrarre la struttura formale degli assiomi, per poter poi valutare la consistenza razionale (in particolare a livello epistemico) delle deduzioni che Galileo proporrà nelle dimostrazioni successive. Il nostro obiettivo perciò non è identificare (in senso fisico) le grandezze spazio e tempo; d'altra parte, questa associazione inevitabilmente le priverebbe del loro significato empirico. Basti ricordare che il "tempo" grandezza fisica (misurabile) nasce nel 1600 con lo studio dei moti e che il problema della sua misura viene affrontato da Galileo con l'uso di un orologio ad acqua[21].

I secondi due assiomi, che riguardano le relazioni di disuguaglianza tra spazi e velocità, sotto l'ipotesi di uguaglianza dei tempi considerati, stabiliscono in termini moderni il seguente enunciato

$$\forall_{t_1,t_2}\,\forall_{s_1,s_2}\,\forall_{v_1,v_2}\,[(t_1 = t_2) \implies (v_1 > v_2 \iff s_1 > s_2)]$$

In questo momento la nuova grandezza fisica "velocità" è in costruzione e pertanto, secondo la prassi, per introdurla si stabiliscono relazioni di uguaglianza e disuguaglianza con altre grandezze, in questo caso con lo spazio[22].

A livello comunicativo, Galileo sceglie di enunciare solo il primo degli assiomi usando la struttura infinitiva di sapore euclideo, ma senza il verbo reggente[23], forse per evidenziare un aspetto oggettivo e impersonale dell'assioma, che rappresenta una verità condivisa, imposta e non dimostrata. Il resto degli assiomi utilizza una forma meno ricercata e letteraria, ossia senza la struttura infinitiva.

Si osservi che Galileo si discosta dal modello di Euclide utilizzando nella definizione la prima persona come soggetto e non l'oggetto da definire come si trova nel testo greco euclideo.

---

[21] Per approfondire il problema del tempo e della sua misura come grandezza fisica si può vedere ad esempio Bergia (2006).

[22] Maggiori approfondimenti sul concetto di velocità in Galileo si possono trovare nella sezione intitolata «Il concetto di velocità» del testo Giusti (1990, p. XXIX).

[23] In Euclide (2007) una struttura analoga si trova non nelle «nozioni comuni», in cui ogni nozione è espressa in forma principale, ma nelle «richieste», in cui il verbo reggente è «[s]ia stato richiesto.»

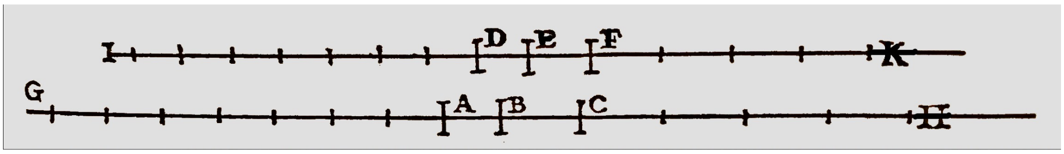


Figura 5.1: Figura tratta da Galilei (1990, p. 167), Teorema I

La sensibilità comunicativa di Galileo si spinge anche a livello logico, in quanto Galileo si preoccupa di chiudere la definizione universalmente rispetto alla variabile tempo. Questa dimensione razionale del contesto di Morselli e Boero (2009) che emerge nella «admonitio» potrebbe essere affiancata da una funzione 5 del quadro di Levenson, Barkai e Larsson (2013) visto che Galileo ci sembra spiegare la definizione giustificandone la ragionevolezza delle scelte strategiche e comunicative (si veda in particolare la precisazione consapevole di Galileo: «può accadere infatti, che in alcuni tempi uguali il mobile attraversi spazi uguali, mentre tuttavia gli spazi attraversati in parti più piccole degli stessi tempi, sebbene uguali, uguali non siano»).

5.2.3 Il teorema I

Di seguito riportiamo il primo dei sei teoremi che si deducono nella terza giornata a partire dalla definizione e dai quattro assiomi.

> TEOREMA I, PROPOSIZIONE I.
>
> Se un mobile che si sposta uniformemente, con una stessa velocità attraversa due spazi, [allora] i tempi degli spostamenti saranno tra loro come gli spazi percorsi.
>
> Attraversi infatti un mobile che si sposta uniformemente con una stessa velocità due spazi AB [si veda figura 5.1], BC, e sia DE il tempo del moto attraverso AB; invece EF sarà il tempo del moto attraverso BC.
>
> Affermo che il tempo DE è rispetto al tempo EF così come lo spazio AB è rispetto allo spazio BC.
>
> Si prolunghino da entrambe le parti gli spazi e i tempi verso GH e IK, e in AG si prendano in qualsiasi numero spazi uguali ad AB stesso, e allo stesso modo in DI altrettanti tempi uguali al tempo DE. E inoltre in CH si prendano subito dopo, un numero qualunque, spazi uguali a CB stesso, e in FK altrettanti tempi uguali al tempo EF.
>
> Allora lo spazio BG e il tempo EI saranno equimultipli dello spazio BA e del tempo ED, secondo qualsivoglia multiplo, e similmente lo spazio HB e il tempo KE [saranno] equimultipli dello spazio CB e del tempo FE, nel qualsivoglia multiplo.
>
> E siccome DE è il tempo dello spostamento attraverso AB, l'intero EI sarà il tempo dell'intero [spostamento attraverso] BG, ogniqualvolta il moto sia assunto equabile, e in EI ci saranno tanti tempi uguali a DE stesso, quanti sono in BG gli spazi uguali a BA, e similmente si conclude che KE è il tempo dello spostamento attraverso HB.

> Poi, ogniqualvolta il moto sia supposto equabile, se lo spazio GB fosse uguale a BH stesso, anche il tempo IE sarebbe uguale al tempo EK: e se GB è più grande di BH, anche IE sarebbe più grande di EK: e se più piccolo, più piccolo.
>
> Perciò ci sono quattro grandezze: AB la prima, BC la seconda, DE la terza e EF la quarta, e il tempo IE e lo spazio GB sono stati presi equimultipli della prima e della terza [grandezza], appunto dello spazio AB e del tempo DE, secondo un qualunque multiplo. Per queste [considerazioni] si è dimostrato che il tempo EK e lo spazio BH o sono insieme uguali, oppure fanno insieme difetto, oppure eccedono insieme gli equimultipli appunto della seconda e della quarta.
>
> Perciò la prima verso la seconda, appunto lo spazio AB e lo spazio BC, ha lo stesso rapporto che la terza e la quarta, appunto il tempo DE verso il tempo EF.
>
> Che era [quanto] da dimostrare. [Trad. nostra]

Il teorema si struttura separando (nell'originale anche visivamente con l'uso del corsivo) l'enunciato dalla dimostrazione e dalla figura 5.1.

La dimostrazione del teorema, vista come risposta alla domanda "perché la tesi è vera?", si configura propriamente nella funzione 2 del quadro della spiegazione di Levenson, Barkai e Larsson (2013). Sulla base di questa osservazione presentiamo di seguito le corrispondenti dimensioni della razionalità che emergono in riferimento al quadro integrato della funzione 2 in Morselli e Levenson (2014), sottolineando come l'aspetto di comprensibilità della dimensione comunicativa sia poco valutabile in quanto dipendente da aspetti di traduzione e di cultura non controllabili: consapevoli di questo ostacolo e della possibile perdita di quanto poteva essere presente nel testo originale latino, abbiamo comunque preferito una traduzione semanticamente letterale che tenesse conto della struttura sintattica italiana solo negli elementi essenziali.

A livello di razionalità comunicativa, l'enunciato si presenta logicamente come una implicazione "se... allora" in cui la apodosi del periodo ipotetico contiene informazioni quantitative, riguardanti la proporzione che intercorre tra gli spazi percorsi e i relativi tempi, mentre la protasi, secondo noi, contiene informazioni qualitative[24], coinvolgendo solo uguaglianze. Si osservi come il teorema, rispetto ai precedenti assiomi in cui sono descritte proprietà secondo noi puramente qualitative di uguaglianza e disuguaglianza di grandezze, sia il primo "ponte di collegamento" tra la dimensione qualitativa e quella quantitativa, testimone del processo da un mondo di «qualità» a un mondo di «quantità», usando un'idea espressa in Koyré (1983, p. 26). Questo aspetto

[24]Non ci soffermiamo qui sul problema di stabilire se la velocità sia una grandezza estensiva o intensiva secondo Galileo, avendo trovato nel testo stesso richiami contrastanti. A nostro parere, inizialmente, nell'assioma III, la velocità è vista in ottica intensiva di qualità che lega spazio e tempo. In effetti la costruzione della frase latina ci suggerisce che possa essere vista come causa del moto. Proseguendo nel testo la velocità ci sembra passare ad avere valenza estensiva, comparendo come termine di una proporzione.

di connessione (e forse potremmo aggiungere di movimento) è realizzato con l'uso del periodo ipotetico.

Il corpo della dimostrazione proposta da Galileo risulta molto schematico e "atomico", costruito su un criterio di coordinazione paratattico, ossia tramite la giustapposizione di periodi sullo stesso piano sintattico.

Lo schema dimostrativo, che abbiamo suddiviso sulla base di quanto proposto dalla prof.ssa Fantini, è derivato dallo stampo euclideo: la dimostrazione inizia con una premessa, in cui si assumono le ipotesi. In questa parte, che abbiamo evidenziato in blu, si assiste ad una spazializzazione del tempo, che viene così ad acquistare significato ontologico e che può essere inserito in una stessa proporzione con lo spazio, secondo il vincolo di omogeneità. Si osservi come la riformulazione della tesi viene scandita dall'inserimento del soggetto personale *[ego] dico ut*, parallelo al greco euclideo λέγω (tradotto con «dico che» in Euclide (2007)). A questa prima parte segue il centro della dimostrazione che si suddivide in due parti: la prima parte, che abbiamo evidenziato in rosso consiste nella costruzione geometrica che supporterà le conclusioni. Qui la spazializzazione del tempo, e delle grandezze in generale, porta Galileo a rappresentarle geometricamente, come Euclide, in termini di "linea retta", intesa in senso euclideo. Questo gli permette non solo di visualizzare gli oggetti coinvolti e di verificare il vincolo di omogeneità, ma anche di sfruttare il secondo αἴτημα (tradotto con «richiesta» in Euclide (ibid.)) enunciato da Euclide, quello di prolungamento. Questa rappresentazione richiama una visione spazializzata, o almeno geometrizzata, del tempo, visto come una grandezza lineare e corrisponde a considerare tali grandezze come estensive. La seconda parte del corpo della dimostrazione, che abbiamo evidenziato in verde contiene le deduzioni che portano alla conclusione attesa, evidenziata in magenta. In questa parte il parallelismo con Euclide prosegue sulla definizione euclidea di «grandezze nello stesso rapporto», che rappresenta uno dei punti di incontro tra la dimensione comunicativa e quella teleologica della razionalità perché guida le scelte strategiche sulla base di scelte linguistiche. Abbiamo voluto evidenziare questa affinità traducendo la dimostrazione di Galilei con le parole di Acerbi, per quanto possibile, presente in Euclide (ibid., p. 975), che riportiamo di seguito:

> Grandezze sono dette essere nello stesso rapporto, prima rispetto a seconda e terza rispetto a quarta, quanto, [presi] secondo quale si voglia multiplo, gli equimultipli [gr. ἰσάκις πολλαπλάσια] della prima e della terza o eccedono insieme [gr. ἅμα ὑπερέχῃ] rispettivamente gli equimultipli della seconda e della quarta, oppure siano insieme uguali [gr. ἅμα ἴσα], oppure facciano insieme difetto [gr. ἅμα ἐλλείπῃ] presi in ordine corrispondente.

In termini moderni potremmo parafrasare la definizione dicendo che quattro grandezze a, b, c, d sono nello stesso rapporto quando per ogni m, n numeri naturali la relazione di ordine tra ma e nb viene preservata passando a mc e nd.

Il teorema si conclude con una frase di evidente modello euclideo ὅπερ ἔδει δεῖξαι (tradotto con «il che si doveva dimostrare» in Euclide (2007)).

Il livello teleologico nel passo di Galileo coincide con lo schema metateorico dell'introduzione dell'implicazione nel calcolo della deduzione naturale: dovendo dimostrare un enunciato in forma di implicazione, si deriva la tesi dalla protasi, aggiunta come ipotesi di lavoro all'insieme delle assunzioni teoriche (costituito dalla definizione, dagli assiomi e implicitamente dalla teoria eudossiana delle proporzioni).

Il livello della razionalità che ci sembra meno consolidato ed evidente in Galileo è quello epistemico: siamo convinti della consapevolezza di Galileo nel riferimento all'assioma II nella deduzione «anche IE sarebbe più grande di EK», e in generale nel riferimento ad Euclide, aspetto che denota presenza di razionalità epistemica, declinato poi a livello comunicativo e teleologico come già argomentato. Tuttavia, nella lettura della dimostrazione evidenziamo nella frase «[e] siccome DE ... intero BG» una carenza, in quanto non ci sono elementi per giustificare dagli assiomi e dalla definizione una "additività" dello spazio e del tempo; in altre parole non è esplicito che se t e t' sono i tempi rispettivamente degli spostamenti s e s' allora il tempo $t + t'$ sia il tempo dello spostamento $s + s'$. La giustificazione del fatto che il tempo IE sia uguale ad EK presenta un'ulteriore mancanza: in effetti, essa non può essere conseguenza della definizione, in quanto essa coinvolge l'implicazione opposta, ossia che se i tempi sono uguali e il moto è equabile allora gli spazi percorsi dal corpo nei rispettivi tempi sono uguali. Questa carenza a livello epistemico potrebbe essere colmata (in termini moderni) con un breve lemma che conclude la tesi affermata sfruttando la definizione di moto equabile, la legge di tricotomia e l'assurdo. In modo analogo si potrebbe colmare la lacuna epistemica sottintesa in «se più piccolo, più piccolo»[25].

5.3 Dai «Principia mathematica» di Newton: una «qualche luce»

In questa sezione analizziamo alcuni brani tratti dall'inizio dell'opera intitolata *Isaac Newton's Philosophiae naturalis Principia mathematica* di Newton. Questo trattato, come si evince dalla «prefazione dell'autore», si struttura interamente sistematizzato nella forma ipotetico-deduttiva e si divide in tre libri: i primi due descrivono le proposizioni generali che indagano le forze naturali, mentre nel terzo vengono spiegati i sistemi del mondo.

Più precisamente noi analizzeremo nella prima sezione parte dell'introduzione dell'opera, costituita dalla prefazione dell'autore al lettore, nella seconda sezione alcune delle definizioni presentate corredate da commen-

[25] Non abbiamo trovato riferimenti che possano indicare se questa carenza epistemica sia ascrivibile ad una nel testo di Euclide, o se sia propria del testo di Galileo.

ti puntuali, e nelle ultime due sezioni gli assiomi della teoria e il primo corollario derivato.

5.3.1 La prefazione dell'autore al lettore

Riportiamo di seguito il testo tradotto di un estratto dalla prefazione dell'autore al lettore, presente all'inizio dei *Principia*:

> PREFAZIONE DELL'AUTORE AL LETTORE
>
> SICCOME nell'indagine dei fenomeni naturali gli antichi tennero in grandissima considerazione la *meccanica* (come ad esempio conferma Pappo); e i moderni, tralasciate le forme della materia e le proprietà nascoste, cercano di ricondurre i fenomeni della natura alle leggi matematiche: in questo trattato [mi] sembra opportuno coltivare la matematica, per quella parte che riguarda la filosofia.
>
> In realtà gli antichi fondarono una *meccanica* divisa in due parti: una *razionale*, che procede con molta cura attraverso dimostrazioni, e una *pratica*. Riguardano la pratica tutte le arti manuali, da cui in particolare la *meccanica* deriva il suo nome. D'altra parte siccome gli artigiani hanno l'abitudine di lavorare poco accuratamente, accade che tutta la *meccanica* si differenzia dalla *geometria* in modo che tutto ciò che è preciso si ascrive alla *geometria*, quanto meno preciso alla *meccanica*. Tuttavia gli errori non sono dell'arte, ma degli artigiani. Colui che lavora con meno cura, è un meccanico più incompleto, e se qualcuno potesse lavorare con la massima cura, costui sarebbe il meccanico più completo di tutti. Infatti riguardano la *meccanica* le descrizioni sia delle linee rette sia delle circonferenze, sulle quali si fonda la *geometria*. La *geometria* non insegna a tracciare queste linee, ma le postula. Postula infatti che il principiante impari a tracciarle accuratamente, prima di giungere alle porte della *geometria*; poi insegna come si risolvano i problemi attraverso queste operazioni; tracciare rette e circonferenze è un problema, ma non geometrico. Dalla *meccanica* si pretende la loro risoluzione, nella *geometria* si insegna come usarla. E la *geometria* si gloria del fatto che dimostra fatti tanto numerosi con così pochi assiomi presi da un altro luogo [dalla meccanica]. Quindi nell'agire la *geometria* si basa sulla meccanica, e non è nient'altro che quella parte della *meccanica universale* che propone e dimostra in modo assai accurato l'arte di misurare. D'altra parte siccome le arti manuali si rivolgono soprattutto ai corpi in movimento, accade generalmente che la *geometria* si riferisca alla grandezza, la *meccanica* al moto. In questo senso la *meccanica razionale* sarebbe la scienza dei moti, causati da forze arbitrarie, e delle forze richieste da moti arbitrari, proposta e dimostrata in modo accurato. Questa parte della *meccanica* è stata perfezionata in *cinque forze* riguardanti le arti manuali dagli antichi, che altrimenti a stento considerarono la gravità (non essendo una forza manuale) nei gravi in movimento attraverso quelle forze.

> Noi invece consideriamo non le arti ma la filosofia, e scriviamo delle forze non manuali ma naturali, e trattiamo quei fenomeni che riguardano in particolare la gravità, la leggerezza, la forza elastica, la resistenza dei fluidi e forze di tale genere o attrattive o repulsive: e proponiamo di conseguenza questi nostri principi matematici della filosofia. Infatti sembra che tutte le difficoltà della filosofia facciano in modo che attraverso i fenomeni dei moti investighiamo le forze naturali, poi da queste dimostriamo le cose restanti. E le proposizioni generali, che trattiamo completamente nel primo e nel secondo libro, servono a questo. Invece nel terzo libro abbiamo proposto un esempio di questo fenomeno per la spiegazione dei sistemi del mondo. Qui infatti, attraverso le proposizioni dimostrate in modo matematico nei libri precedenti, sono derivate dai fenomeni celesti le forze di gravità che fanno tendere i corpi al sole e ai singoli pianeti. Poi da queste forze, attraverso proposizioni ancora una volta matematiche, sono dedotti i moti dei pianeti, delle comete, della Luna e del mare. Magari fosse possibile derivare gli altri fenomeni naturali dai principi della meccanica con lo stesso genere di argomentazione! In effetti molte cose mi fanno supporre che tutti quei fenomeni possano dipendere da certe forze per cui le particelle dei corpi, per cause ancora sconosciute, o si urtano reciprocamente e si ricompongono secondo figure regolari, o si respingono a vicenda e si allontanano: per queste forze ignote, i filosofi finora hanno indagato la natura senza successo. Spero invece che i principi qui esposti offrano una qualche luce o a questo modo di filosofare, o ad un altro più vero.
>
> [...]
>
> Chiedo con tutte le mie forze che tutte le cose si leggano in modo chiaro, e che le lacune in una materia così difficile non siano tanto criticate quanto approfondite da nuovi tentativi dei lettori, e completate benevolmente. [Trad. nostra; Cors. e Maius. d.A.]

L'obiettivo di Newton è esplicito e chiaro fin dall'inizio della prefazione e si pone in continuazione con il percorso già intrapreso da Galileo: «coltivare la matematica», in particolare ricavare in modo matematico le leggi del moto dei corpi e dei pianeti[26]. Questo obiettivo è giustificato quasi da una volontà intrinseca alla natura[27], che, quasi personificata, spinge l'uomo ad una indagine e ad una interpretazione, da cui l'uomo stesso deriva i principi fondanti del mondo. La prefazione di Newton è quindi particolarmente interessante perché l'aggettivo «matematici», presente nel titolo dell'opera e nella prefazione dell'autore, interviene nella dimensione filosofica delle «forze [non manuali ma] naturali»; possiamo quindi inscriverla nel nostro tentativo di indagare il rapporto tra Matematica e Fisica: vengono distinti infatti due rami della meccanica, una pratica, che riguarda le arti manuali, e

[26]Si legge anche: «Noi invece consideriamo non le arti ma la filosofia [dots] e proponiamo di conseguenza questi nostri principi *matematici* della filosofia.» [Cors. nostro]

[27]Si veda il passo: «sembra che tutte le difficoltà della filosofia facciano in modo che attraverso i fenomeni dei moti investighiamo le forze naturali, poi da queste dimostriamo le cose restanti.»

una razionale, specificando che questa «procede con molta cura attraverso dimostrazioni.»

Inoltre è interessante leggere come Newton parla del rapporto tra «meccanica» e «geometria», delineando una sorta di "*cursus philosophiæ naturalis studii*": questi due aspetti collaborano alla descrizione dei fenomeni della natura su due fronti e perciò, pur avendo ruoli diversi, sono mutualmente complementari, nel senso che ciascuna pone le fondamenta sull'altra. In particolare, la meccanica ci insegna a tracciare nel mondo fisico gli oggetti - le linee rette e le circonferenze[28]-, la cui esistenza è postulata dalla geometria, che si preoccupa di «dimostrare fatti così numerosi» da usare nel mondo fisico. D'altra parte Newton, esplicitando l'ordine in cui le discipline stesse richiedono di essere affrontate dal principiante, si preoccupa anche di tracciare i "confini", dicendo cosa la meccanica e la geometria insegnano (la meccanica insegna a tracciare rette e circonferenze, la geometria insegna come risolvere i problemi) e quali sono i loro oggetti intrinseci (per natura sono geometriche le grandezze e meccanici il moto e le forze). In un certo senso potremmo dire che la geometria è un "cesello" con cui si raffina l'arte meccanica attraverso dimostrazioni, «quella parte della meccanica universale che propone e dimostra in modo assai accurato l'arte di misurare.» Ci ha colpito molto come queste due entità, soprattutto la geometria, siano enfatizzate e personificate come soggetti agenti: si vedano i verbi «propone», «dimostra», «insegna», «procede» e infine la frase imponente e trionfante, «la geometria si gloria del fatto che dimostra fatti tanto numerosi con così pochi assiomi presi da un altro luogo», enfatizzata dall'antitesi tra i due aggettivi correlati *tam paucis... tam multa* e dall'ultimo inciso «presi da un altro luogo.»

In seguito, dopo una breve presentazione della struttura dei *Principia*, Newton esplicita il suo *modus operandi*, o meglio, usando le parole di Newton stesso, *genus argumentandi*: intende proseguire la strada già percorsa da Galileo di sistematizzazione matematica utilizzando un sistema ipoteticodeduttivo, che dalle proposizioni dimostrate in precedenza, «in modo matematico», procede derivando nuovi risultati sui moti dei corpi celesti. A livello comunicativo riteniamo pregnante la congiunzione *etiam*, con valore temporale, alla cui traduzione (ancora una volta) abbiamo voluto attribuire un sentimento di stupore misto a fiducia del fatto che, nell'enumerare i principi della filosofia, si procede sempre per via matematica: «[m]agari fosse possibile derivare gli altri fenomeni naturali dai principi della meccanica con lo stesso genere di argomentazione!»

Nella conclusione della prefazione Newton presenta in prima persona il proprio sforzo nel raggiungere un'esposizione il più possibile chiara e comprensibile, consapevole della grande difficoltà intrinseca al suo oggetto di studio. Questa tensione verso un'organizzazione limpida e accessibile

[28]In questa distinzione leggiamo un riferimento implicito alla distinzione che Aristotele presenta nel suo trattato sul cielo: «[i]l moto locale [...] è sempre o rettilineo, o circolare, o misto di questi due: perché semplici sono questi due soli. E la ragione è che ci sono anche due sole grandezze semplici, la linea retta e quella circolare» («Del Cielo», pp. 300–301).

può essere inquadrata essenzialmente nella dimensione comunicativa della razionalità presente nel quadro di Morselli e Boero (2009).

Nuovamente il livello epistemico della razionalità si esprime attraverso la scelta consapevole di un sistema ipotetico-deduttivo di matrice euclidea e la ricerca di quegli assiomi e definizioni necessari per derivare in modo matematico i risultati ottenuti nell'indagine dei fenomeni naturali, anche tramite esperimenti. Ancora, il livello teleologico si inserisce nella tradizione galileiana di dimostrazione matematica: l'obiettivo di Newton è quello di indagare matematicamente la natura, facendone emergere i principi da dimostrare e da cui dedurre i sistemi del mondo. Al solito, il livello comunicativo rimane quello più evidente e quello a cui abbiamo più ampiamente dedicato attenzione per la sua ricchezza sia di contenuti sia di scelte stilistiche, a partire dalla conferma linguistica del latino come mezzo di comunicazione.

Nel quadro della spiegazione di Levenson, Barkai e Larsson (2013) possiamo scorgere tratti della funzione 1 nei riferimenti descrittivi dei fenomeni e aspetti della funzione 3 intesa nuovamente come interpretazione in senso matematico, quindi in senso inverso rispetto all'originale, dei «sintomi[29]», usando il termine galileiano. Ciononostante, la funzione che ci aspettiamo primeggiare, e che già dalla prefazione è dominante, è secondo noi quella argomentativa, intrinseca alla dimostrazione, proprio per la natura e per l'impostazione matematica che Newton vuole dare ai suoi *Principia*.

5.3.2 Le definizioni

Il trattato dei *Principia* inizia propriamente con il capitolo sulle definizioni, in cui Newton fissa la terminologia usata nel seguito. Come abbiamo già osservato, l'impostazione deduttiva manifesta aspetti dello statuto epistemico della matematica (definizioni e assiomatizzazioni) e richiama l'impostazione euclidea. A differenza di Galileo, Newton riacquista un'impostazione stilistica della definizione di stampo impersonale, in cui il soggetto è espresso dal termine che si vuole definire.

Guardando l'impostazione possiamo osservare come anche Newton posponga ad ogni definizione un paragrafo di riflessione, interpretabile però in termini non più della funzione 5 del quadro di Levenson, Barkai e Larsson (ibid.), come in Galileo, ma a nostro parere della funzione 3: Newton infatti ci sembra ricondurre alla terminologia quotidiana e sperimentale la significatività di ciascuna definizione tramite considerazioni sia quantitative (esempi di applicazione elementari della definizione tramite sostituzione di valori[30] all'interno della formula, si veda ad esempio «[aria] con densità doppia, in uno spazio altresì doppio, diventa quadrupla») sia qualitativi

[29]Si veda all'inizio: «i moderni [. . .] cercano di ricondurre i fenomeni della natura alle leggi matematiche.»

[30]Si osservi come, a differenza di comuni esercizi nei libri di testo di Fisica in cui vengono esplicitati valori definiti delle grandezze, in questo caso l'applicazione sembra indagare questioni di proporzionalità.

(spesso sono considerazioni di terminologia, si veda ad esempio «chiamerò [...] con il nome di corpo o di massa», oppure di modellizzazione, si veda il ruolo del mezzo pervasivo). Allo stesso tempo, siamo portati a pensare che Newton, tra altri obiettivi, cerchi di riprodurre nel commento le condizioni e gli esempi che hanno costituito il suo "principio di necessità", ossia le questioni da lui considerate e che hanno contribuito al bisogno di enunciare le definizioni.

Riportiamo di seguito la traduzione di alcuni passi sulle definizioni:

> PRINCIPI MATEMATICI
> DELLA FILOSOFIA NATURALE
> DEFINIZIONI.
> DEFINIZIONE I.
> La quantità di materia è la misura della stessa definita unitamente dalla densità e dalla grandezza di quella [materia].
> ARIA con densità doppia, in uno spazio altresì doppio, diventa quadrupla; in uno [spazio] triplo, [diventa] sei volte. Vale la stessa cosa per la neve e le polveri condensate per compressione o liquefazione. E il calcolo è lo stesso per tutti i corpi, che in diversi modi sono stati condensati per certe cause. D'altra parte qui non considero alcun mezzo che pervade senza ostacoli gli spazi tra le parti, ammesso che ci sia. Tuttavia nel seguito chiamerò questa quantità con il nome di corpo o di massa senza distinzione. La si conosce attraverso il peso di ciascun corpo: infatti attraverso esperimenti sui pendoli condotti in modo assai accurato ho trovato che è proporzionale al peso, come sarà mostrato in seguito.
> DEFINIZIONE II.
> La quantità di moto è la misura della stessa definita unitamente dalla velocità e dalla quantità di materia.
> Il moto totale è la somma dei moti tra le singole parti; perciò in una massa doppia, con uguale velocità, [il moto] è doppio, e con doppia velocità [il moto è] quadruplo.
> DEFINIZIONE III.
> La forza naturale [lat. *vis insita*] della materia è la capacità di resistere con cui ciascun corpo, per quanto sta in sé, persevera nel proprio stato o di quiete o di moto uniformemente in linea retta.
> [...]
> DEFINIZIONE IV.
> La forza impressa è l'azione esercitata sul corpo, per mutare il suo stato di quiete o di moto uniformemente in linea retta. [Trad. nostra; Maius. d.A.]

Le definizioni presentate in questa sede si distinguono in modo naturale in due gruppi: le prime due sembrano avere caratteristica quantitativa, di misura, in quanto in termini moderni si esprimerebbero nelle formule note

$$m = \rho V \qquad\qquad q = \nu m$$

dove m indica la «quantità di materia» (o massa), ρ indica la densità, V indica la «grandezza» (oggi forse diremmo il volume) e v indica la velocità. Le altre due invece sembrano riguardare una caratteristica qualitativa dell'oggetto che si vuole definire, rispettivamente «la capacità di resistere» e «l'azione esercitata.»

Possiamo osservare come nei commenti alle definizioni, a livello comunicativo Newton sia molto attento a distinguere i fatti oggettivi, come gli esempi e gli esperimenti presentati, i calcoli e le proporzioni quantitative, da quelli soggettivi che dipendono da Newton stesso e che descrivono il livello di modellizzazione che presenta; ad esempio nella prima definizione, dopo alcuni esempi, si esplicita che «non [si] consider[a] alcun mezzo che pervad[a] senza ostacoli gli spazi tra le parti, ammesso che ci sia.» L'assenza di un mezzo pervasivo è un'ipotesi aggiuntiva introdotta da Newton, che ne è consapevole e la esplicita, manifestando un aspetto di razionalità secondo noi intermedio tra epistemico, in quanto riferito alle proprietà e alle ipotesi assunte, e comunicativo, in quanto tendente alla comprensibilità e chiarezza complessiva.

Pensiamo che emerga anche l'aspetto di generalizzazione dello statuto epistemico della matematica che abbiamo evidenziato nel capitolo precedente, in particolare nella frase «il calcolo è lo stesso per tutti i corpi.»

Abbiamo osservato altri due aspetti interessanti: il primo è il modo in cui Newton giustifica la validità dell'affermazione che la massa e il peso siano proporzionali, ossia tramite esperimenti accuratissimi sui pendoli. Il ruolo dell'esperimento in questo contesto ci appare come mezzo di convalida e di plausibilità di una congettura, se non addirittura di dimostrazione, purché (ne) siano stati condotti (numerosi ed) in modo accurato.

Un secondo aspetto che ci ha colpito, a livello comunicativo, riguarda il commento alla seconda definizione in cui secondo noi si associano a livello ontologico «moto» e «quantità di moto» tramite l'identificazione linguistica dei soggetti[31]: nella definizione infatti il soggetto è propriamente la «quantità di moto», mentre nel commento il soggetto passa ad essere propriamente il «moto.» Questa traslazione potrebbe rappresentare una diversa interpretazione del "moto", che si configura non più (solo) come qualità di un corpo, distinta dalla quiete, ma (anche) come quantità che ogni corpo possiede e che può essere misurata, in termini moderni, come prodotto tra massa e velocità. Tra le conseguenze di questa identificazione pensiamo sia rilevante il fatto che anche la quiete in qualche modo si renda quantità e, più precisamente, una quantità di moto nulla.

[31]In questa sede non entriamo in merito alla concezione storico-epistemologica del moto secondo Newton in quanto si discosta dal nostro obiettivo di analisi. Con l'osservazione della possibile identificazione volevamo evidenziare la grande ricchezza presente a livello comunicativo.

5.3.3 Gli assiomi

Alla sezione riguardante le definizioni segue quella riguardante gli assiomi, termine precisato da Newton stesso in «leggi del moto.»

Anche in questo caso Newton mantiene l'impostazione stilistica del dittico enunciato-commento in cui la funzione di quest'ultimo è analoga a quella vista per le definizioni, quindi ascrivibile alla funzione 3 del quadro di Levenson, Barkai e Larsson (2013): Newton parafrasa la legge, espressa in termini generali e decontestualizzati, in contesto quotidiano con esempi reali (si veda ad esempio la prima legge in cui si presentano l'esempio del proiettile, della trottola e dei pianeti).

A livello comunicativo, Newton sceglie di enunciare gli assiomi usando la struttura, già presente nel primo assioma in Galileo e nella matrice euclidea, della frase infinitiva senza verbo reggente.

Riportiamo di seguito la prima parte di testo:

> ASSIOMI,
> O PIUTTOSTO
> LEGGI DEL MOTO.
> LEGGE I.
>
> Che ogni corpo persevera nel proprio stato di riposo o di moto uniformemente in linea retta, se non fino a quando è costretto a cambiare il proprio stato per effetto di forze impresse.
>
> I proiettili perseverano nel loro moto, se non fino a quando sono rallentati dalla resistenza dell'aria, e spinti verso il basso dalla forza di gravità. Una trottola, le cui parti stando insieme continuamente si allontanano dai moti rettilinei, non smette di girare, se non fino a quando è rallentata dall'aria. D'altra parte i corpi più grandi dei pianeti e delle comete conservano più a lungo i loro moti progressivi e circolari compiuti in spazi meno resistenti.
>
> LEGGE II.
>
> Che il cambiamento del moto è proporzionale alla forza motrice impressa, e avviene lungo la linea retta con cui quella forza è impressa.
>
> Se qualche forza genera un qualche moto; una doppia ne genererà uno doppio, una tripla uno triplo, sia che sia stata impressa tutta in una volta, sia a poco a poco e più volte. E questo moto (poiché è sempre determinato nella stessa zona con la forza generatrice), se il corpo si muoveva prima, al moto di quello o si aggiunge concorde, o si sottrae contrario, o si sovrappone obliquamente se obliquo, e con quello si compone secondo entrambe le estremità.
>
> LEGGE III.
>
> Che c'è sempre una reazione uguale e contraria all'azione: o piuttosto che tra loro le azioni di due corpi sono reciprocamente sempre uguali e dirette verso parti opposte. [Trad. nostra]

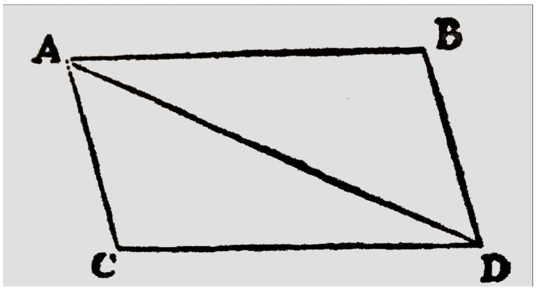


Figura 5.2: Figura tratta da Newton (1972, p. 14), Corollario I

5.3.4 Il corollario I

Riportiamo di seguito il testo e la dimostrazione del primo corollario che viene presentato nei *Principia*:

> COROLLARIO I.
>
> Che sotto forze congiunte un corpo descrive la diagonale di un parallelogramma nello stesso tempo, in cui [in tempi] diversi [descrive] i lati.
>
> Se un corpo in un certo tempo, per effetto della sola forza M impressa nel punto A [si veda figura 5.2], fosse trasportato con moto uniforme da A verso B; e per effetto della sola forza N impressa nello stesso punto, fosse trasportato da A verso C: si completerebbe un parallelogramma ABCD, e proprio quel corpo da entrambe le forze sarebbe trasportato nella diagonale da A a D nello stesso tempo.
>
> Infatti poiché la forza N agisce lungo la linea AC parallela alla stessa BD, per la legge II questa forza non cambierà mai la velocità dell'avvicinarsi [del corpo] a quella linea BD generata dall'altra forza. Quindi il corpo si avvicinerà nello stesso tempo alla linea BD, che sia impressa la forza N, o meno; e perciò alla fine di quel tempo si troverà in qualche punto su quella linea BD.
>
> Con lo stesso argomento, alla fine dello stesso tempo, [il corpo] si troverà in qualche punto sulla linea CD, e quindi è inevitabile che si trovi nel punto D di intersezione di entrambe le linee.
>
> Continuerà poi con il moto rettilineo da A a D per la legge I. [Trad. nostra]

Il corollario propone e dimostra un risultato che nei testi di fisica del liceo è assunto come regola, detta solitamente "regola del parallelogramma", e che si utilizza per trovare la risultante di due forze non parallele.

A livello strutturale, il testo è organizzato da Newton nuovamente, come in Galileo, separando, anche visivamente con due stili di testo diversi, l'enunciato dalla dimostrazione e dalla figura (si veda l'originale in appendice A.2).

La dimostrazione del corollario si snoda su alcuni passi che abbiamo evidenziato nella traduzione utilizzando colori diversi: inizialmente, in blu, viene riformulato l'enunciato, esplicitando i riferimenti alla figura che supporta il ragionamento; una figura geometrica completamente concettualizzata, in cui non c'è traccia del «corpo» considerato ma solo delle direzioni del moto, ossia i due lati AB e AC, completati a parallelogramma, e la diagonale AD. Possiamo osservare come la prima conseguenza, «si completerebbe un parallelogramma ABCD», permette al lettore, oltre di poter fare riferimento alla «diagonale da A a D», di visualizzare spazialmente e mentalmente la figura. Notiamo inoltre che a livello comunicativo la tesi nella riformulazione è de-personalizzata e non più introdotta da alcun verbo reggente soggettivo sullo stile del galileiano [ego] dico ut e dell'euclideo λέγω.

Questa volta la costruzione della figura, la parte evidenziata in rosso, si inserisce all'interno della presentazione iniziale e non è più separata, come in Galileo.

Nel successivo capoverso, evidenziato in verde, è contenuta la struttura portante, l'idea chiave della dimostrazione proposta da Newton che, come tale, risponde alla funzione 2 della spiegazione del quadro di Levenson, Barkai e Larsson (2013) e i cui aspetti della razionalità saranno riportati alla declinazione di Morselli e Levenson (2014). In questo passo si concretizza il modo in cui Newton compone i due moti lungo le due direzioni AB e AC del parallelogramma.

Secondo la legge II, parafrasata in termini moderni, il cambiamento del moto, e quindi della velocità del corpo, avviene lungo la direzione della forza impressa ed è proporzionale al suo modulo. Il riferimento esplicito e consapevole a questa proprietà, assunta come assioma, costituisce un'evidenza della dimensione epistemica della razionalità.

Ci sembra interessante sottolineare come Newton compia un salto qualitativo, una sorta di esperimento mentale, espresso l'inciso «che sia impressa la forza N, o meno», che denota una consapevolezza sull'andamento del fenomeno. Significa che, indipendentemente dalla presenza della forza N, il tempo con cui il corpo si avvicina alla linea BD è fissato, una volta fissata la forza M (ciò che cambia è il punto di arrivo, che dipende dal vettore forza N).

Possiamo ascrivere al livello teleologico l'uso dell'analogia che Newton fa per "abbreviare" la dimostrazione, condensando nell'espressione «con lo stesso argomento» quella che sarebbe stata una pura ripetizione del ragionamento, *mutatis mutandis*.

In effetti, a questo punto la dimostrazione era conclusa: Newton ha dimostrato che il corpo descrive la diagonale AD del parallelogramma ABCD. Ci stupisce non solo il fatto che manchi l'usuale formula di "cvd", un dettaglio stilistico forse trascurabile, quanto più il fatto che Newton aggiunga una frase per completare la descrizione del moto anche in tempi successivi: forse per uno spostamento di obiettivo, che passa dalla dimostrazione del corollario alla descrizione del moto del corpo nella sua totalità temporale. Questo aspetto si può interpretare a livello teleologico sia in termini di una carenza, visto che l'obiettivo di dimostrare l'enunciato era già stato raggiunto, ma anche in termini di una presenza, visto che, nell'obiettivo più ampio della descrizione completa del moto, Newton mostra consapevolezza, anche a livello epistemico (si veda il richiamo alla legge I).

5.4 Il moto dei proiettili nel testo di Amaldi

In questa sezione concludiamo l'analisi dei testi a nostra disposizione considerando il capitolo del libro di testo scolastico Amaldi (2007) intitolato «[i]l moto dei proiettili.»

Questo capitolo è costituito da cinque pagine ed è il quarto dei sette capitoli in cui è suddivisa l'unità 10, intitolata «Le forze e il movimento.» Il capitolo è preceduto da un primo capitolo, intitolato «La caduta libera», dove si definisce e si descrive quantitativamente il moto dei corpi in presenza della sola forza-peso, arrivando nel secondo capitolo, intitolato «La forza peso e la massa», a derivare la formula $\vec{F}_p = m\vec{g}$ e a dare una prima applicazione nella bilancia a bracci uguali. Il terzo capitolo, «La discesa lungo un piano inclinato», presenta una descrizione quantitativa che porta ad ottenere l'espressione dell'accelerazione lungo il piano inclinato. Dopo il capitolo sui proiettili si inserisce una pagina di approfondimento matematico dal titolo «La gittata massima» e l'unità si conclude con gli ultimi tre capitoli rispettivamente sulla forza centripeta, sul moto armonico di una molla e sul pendolo. Prima delle pagine riassuntive, «I concetti e le leggi», e di una modellizzazione di realtà sul «[p]erché nel giro della morte sulle montagne russe i vagoni non cadono», si inseriscono due pagine che discutono l'evoluzione storico-epistemologica del concetto di forza, nella rubrica «Le idee della fisica.» Tutti i capitoli si concludono con una o più «[d]omande» di applicazione, eventualmente precedute da «[p]roblemi», ossia esempi di esercizi di applicazione svolti in cui si evidenzia una parte di «[s]trategia e soluzione» ed una «[d]iscussione» conclusiva.

Dalla quarta di copertina del testo Amaldi (ibid.) si apprendono alcuni suoi caratteri costitutivi; di particolare interesse riteniamo essere:

> Chiarezza, semplicità e rigore caratterizzano *La fisica di Amaldi*, che raccoglie l'eredità didattica della scuola di Enrico Fermi

e di seguito viene specificato che il testo contiene

> [t]eoria riscritta e illustrata con immagini nuove, che *mira a comunicare* i concetti fondamentali senza dilungarsi in dettagli non essenziali. Numerosi i riferimenti alla fisica quotidiana. [Cors. nostro]

I risultati che otterremo saranno importanti perché permetteranno di capire quale sia l'immagine non solo della Fisica e della Matematica come discipline separate, ma della loro effettiva interazione all'interno di uno strumento didattico come il libro di testo. Conseguentemente si potrà riflettere su come eventualmente intervenire per potenziare le carenze e raggiungere una costruzione e un apprendimento di un sapere condiviso più autentica ed efficace.

Per facilità di lettura e di riferimenti abbiamo scelto di dividere il resto della sezione nelle corrispondenti sottosezioni presenti nel capitolo originale, affiancandovi l'immagine della pagina relativa di Amaldi (2007).

5.4.1 Introduzione

Il capitolo, come si vede dalla figura 5.3, si apre *in medias res* presentando tre situazioni realistiche: un lancio verticale, un lancio orizzontale e un lancio obliquo. La direzione del lancio suggerisce il titolo delle successive tre sottosezioni che analizzano maggiormente nel dettaglio il fenomeno. Ciascuna situazione è associata ad una immagine ed una breve didascalia (di una frase) descrittiva. Si osservi come la distinzione in tre casi sulla base della direzione della velocità non è presente nel testo di Galileo riguardante il moto dei proiettili, dove il modello considerato è il seguente:

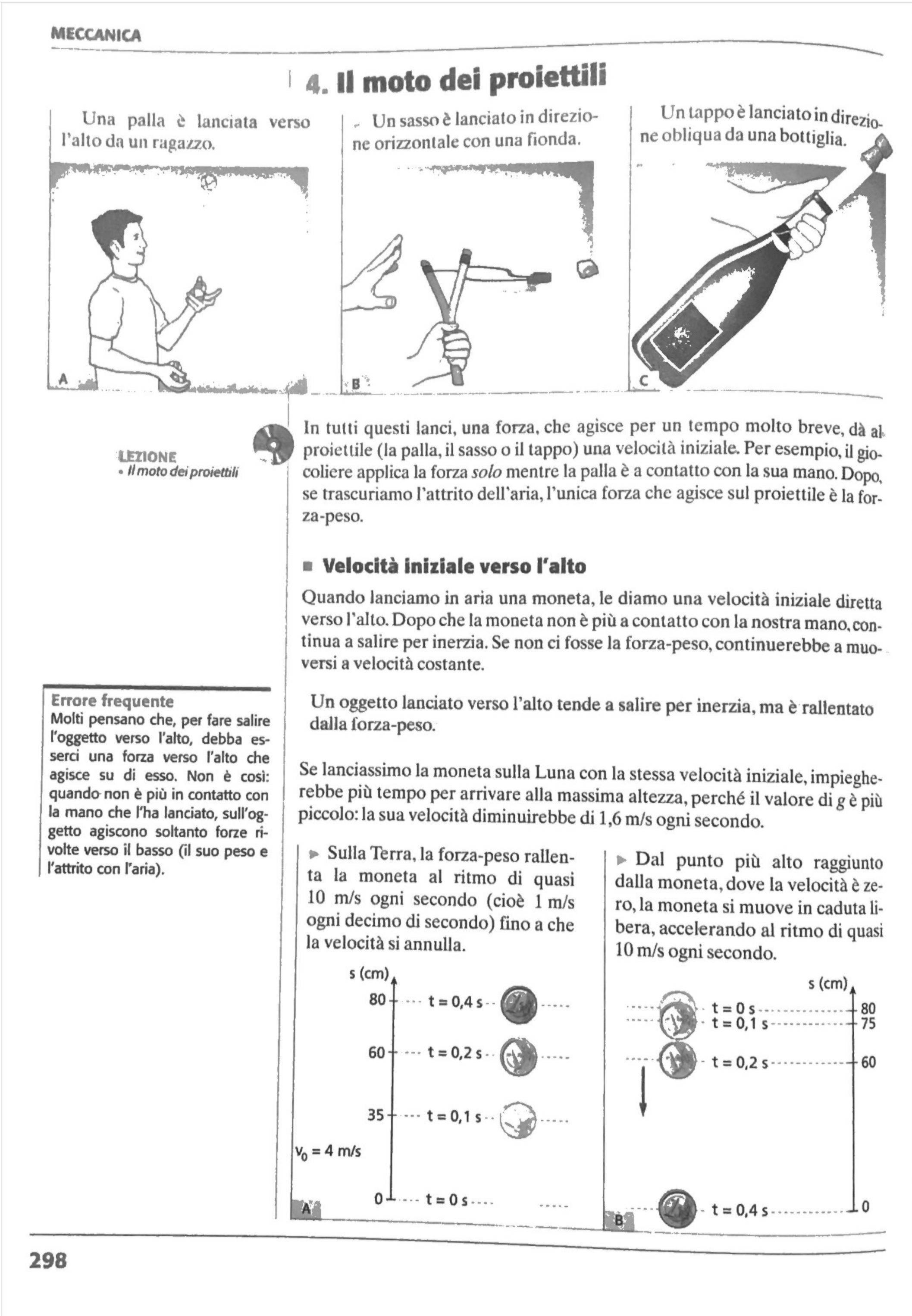
> [S]e invece lo pensiamo [il piano] limitato e posto in alto, il corpo, che immagino dotato di gravità, spinto verso il termine del piano, proseguendo più avanti, aggiungerebbe sopra al precedente spostamento equabile e indelebile quella propensione verso il basso che possiede per la sua gravità[32]. [Trad. nostra]

L'introduzione al capitolo si conclude con tre periodi: il primo, sfruttando un'analogia sottilmente implicita, enfatizzata dall'espressione «[i]n tutti questi lanci», evidenzia uno dei possibili tratti comuni ai tre fenomeni: la presenza di una forza, in effetti di un impulso, che imprime una velocità iniziale ad un «proiettile.» Osserviamo che del termine "proiettile", che, a differenza di Galileo[33], non è stato (ancora) definito[34], viene data la realizzazione nelle tre situazioni (il proiettile è nel primo caso un pallina, nel secondo un sasso e nel terzo un tappo). Gli aspetti di modellizzazione verranno analizzati più nel dettaglio nell'ultima sottosezione. Il secondo periodo fornisce un «esempio» del motivo per cui si è detto «che agisce per un tempo molto breve»: infatti, nel primo caso l'unica forza esterna agisce fintanto che pallina e mano sono a contatto. Il terzo periodo caratterizza il moto dei tre oggetti

[32]«[S]i vero terminatum et in sublimi positum intelligamus, mobile, quod gravitate praeditum concipio, ad plani terminum delatum, ulterius progrediens, aequabili atque indelebili priori lationi superaddet illam quam a propria gravitate habet deorsum propensionem» (Galilei 1990, p. 249).

[33]Sebbene nel testo analizzato in effetti Galileo non riserva una definizione vera e propria al termine "proiettile", rispetto al capitolo di Amaldi (2007) nell'introduzione della «Giornata Terza» si trova la precisazione «corpi lanciati, o proietti.»

[34]Probabilmente la definizione viene implicitamente lasciata alla capacità del lettore di cogliere l'analogia nelle didascalie descrittive data dall'uso del verbo "lanciare."



MECCANICA

4. Il moto dei proiettili

Una palla è lanciata verso l'alto da un ragazzo.

Un sasso è lanciato in direzione orizzontale con una fionda.

Un tappo è lanciato in direzione obliqua da una bottiglia.

A B C

LEZIONE
• *Il moto dei proiettili*

In tutti questi lanci, una forza, che agisce per un tempo molto breve, dà al proiettile (la palla, il sasso o il tappo) una velocità iniziale. Per esempio, il giocoliere applica la forza *solo* mentre la palla è a contatto con la sua mano. Dopo, se trascuriamo l'attrito dell'aria, l'unica forza che agisce sul proiettile è la forza-peso.

■ Velocità iniziale verso l'alto

Quando lanciamo in aria una moneta, le diamo una velocità iniziale diretta verso l'alto. Dopo che la moneta non è più a contatto con la nostra mano, continua a salire per inerzia. Se non ci fosse la forza-peso, continuerebbe a muoversi a velocità costante.

Errore frequente
Molti pensano che, per fare salire l'oggetto verso l'alto, debba esserci una forza verso l'alto che agisce su di esso. Non è così: quando non è più in contatto con la mano che l'ha lanciato, sull'oggetto agiscono soltanto forze rivolte verso il basso (il suo peso e l'attrito con l'aria).

Un oggetto lanciato verso l'alto tende a salire per inerzia, ma è rallentato dalla forza-peso.

Se lanciassimo la moneta sulla Luna con la stessa velocità iniziale, impiegherebbe più tempo per arrivare alla massima altezza, perché il valore di g è più piccolo: la sua velocità diminuirebbe di 1,6 m/s ogni secondo.

► Sulla Terra, la forza-peso rallenta la moneta al ritmo di quasi 10 m/s ogni secondo (cioè 1 m/s ogni decimo di secondo) fino a che la velocità si annulla.

► Dal punto più alto raggiunto dalla moneta, dove la velocità è zero, la moneta si muove in caduta libera, accelerando al ritmo di quasi 10 m/s ogni secondo.

298

Figura 5.3: Amaldi (2007, p. 298)

negli istanti successivi all'impulso iniziale: pur di trascurare l'attrito dell'aria, il moto è influenzato solo dalla presenza della forza-peso.

Nel quadro teorico della razionalità di Morselli e Boero (2009) possiamo evidenziare aspetti di natura epistemica nella corretta individuazione delle grandezze fisiche in gioco: una forza iniziale, una velocità, la forza-peso, l'attrito (implicitamente presente ma trascurato).

D'altra parte osserviamo una carenza a livello epistemico, e forse epistemologico, nell'associazione di una velocità (implicitamente non nulla) alla presenza di una forza. Per il secondo principio della dinamica di Newton[35], in effetti secondo la legge II, la presenza di una forza determina non una velocità (non nulla) ma un'accelerazione, e quindi un cambiamento di velocità, che avviene nella direzione della forza.

Inoltre, possiamo osservare un'altra carenza nella modellizzazione che viene proposta in questa introduzione: infatti se, come pensiamo, l'obiettivo è quello di descrivere il moto (anche solo la traiettoria) dei «corpi proietti», usando l'espressione presente in Galilei (1990), l'aspetto enfatizzato, ossia la presenza di una «forza, che agisce per un tempo molto breve», è del tutto ininfluente al raggiungimento dello scopo. Questa carenza a livello teleologico si ripercuote e si rafforza anche a livello comunicativo, visto che l'enfasi, data dall'inciso nella frase, dalla ripetizione continua del verbo «lanciare» (che potrebbe far presupporre erroneamente la necessaria presenza di un agente che imprima una forza) e anche dall'uso successivo dello stile corsivo, comporta una focalizzazione dell'attenzione dello studente su tale forza e sulla breve durata dell'impulso.

Un'altra carenza nel livello teleologico si manifesta nel fatto che le scelte strategiche non siano inquadrate da subito in un obiettivo esplicito e di conseguenza l'effetto ottenuto nello studente è una sospensione del significato, dovuta al mancato collegamento tra le affermazioni e lo scopo. Sospensione che si riflette anche sul livello comunicativo, come si può osservare leggendo la frase «Per esempio, il giocoliere applica la forza *solo* mentre la palla è a contatto con la sua mano»: sebbene sia una precisazione (e in effetti un'interpretazione) della frase «che agisce per un tempo molto breve» in una delle tre situazioni esemplificative iniziali, essa non porta alcun contributo significativo alla realizzazione dell'obiettivo implicito (descrivere quantitativamente e qualitativamente il moto, ad esempio esplicitandone la traiettoria). Al contrario, vediamo l'enfasi sulla presenza di una forza come occasione colta dagli autori per evitare un errore comune, relativo alla dinamica, che associa al verso del moto («verso l'alto») la presenza di una forza diretta in modo concorde («verso l'alto»). Tuttavia, questa focalizzazione "dinamica", di cui non dubitiamo la veridicità ma solo l'efficacia a livello comunicativo, in quanto secondo noi avrebbe ragione di essere nel capitolo relativo alla dinamica e all'introduzione delle forze, crea un intreccio tra cinematica e dinamica, che rischia di ostacolare il lettore inesperto, non essendo esplicitato

[35] «La forza è uguale alla massa per l'accelerazione.» (Amaldi 2007, p. 269)

e non contribuendo alla descrizione del moto del proiettile che pensiamo essere il fine del capitolo. Questa concentrazione sulla forza esterna, causa del moto del proiettile, e sulla durata dell'impulso è assente nel testo storico di Galileo, dove si legge: «mi immagino un qualche mobile proietto sopra un piano orizzontale, isolato da ogni impedimento [36]» [Trad. nostra].

All'interno del quadro teorico di Levenson, Barkai e Larsson (2013) possiamo evidenziare nel testo di Amaldi (2007) un aspetto descrittivo della spiegazione, quindi funzione 1, delle situazioni reali presente nelle didascalie, anche se tale funzione si realizza a livello elementare. Questo ruolo viene approfondito interpretando in un'ottica fisica le situazioni, evidenziando le grandezze fisiche in gioco e cercando una dimensione unitaria, propria degli aspetti di astrazione e generalizzazione dello statuto epistemico della Matematica. Possiamo inquadrare quest'ottica parzialmente anche nella funzione 3 della spiegazione, pur di intenderla come interpretazione degli eventi in termini delle grandezze fisiche note, anche se originariamente la funzione 3 asserisce il movimento "contrario", ossia dalla teoria al quotidiano.

5.4.2 «Velocità iniziale verso l'alto»

Il capitolo prosegue con una sezione dedicata al caso in cui la direzione della velocità impressa al proiettile sia parallela alla forza-peso, ma con verso opposto.

La sezione si apre anche in questo caso *in medias res*, con tre brevi frasi che descrivono la situazione paradigmatica del lancio di una moneta: la prima frase descrive l'azione (il lancio della moneta in aria) e l'effetto dell'azione (presenza di una velocità diretta verso l'alto) sul proiettile, la seconda descrive lo stato successivo all'azione («continua a salire per [il principio di] inerzia[37]») e la terza presenta una situazione parallela in assenza di forza-peso.

Un box riquadrato enfatizza una frase che descrive qualitativamente le cause e gli effetti sul moto puramente verticale di un proiettile, giustificandoli con il principio di inerzia e con la presenza della forza-peso. Lateralmente viene inquadrato un «errore frequente»: motivare direzione e verso del moto in termini della presenza di una forza con le stesse caratteristiche.

La sezione si conclude con un esperimento che confronta il tempo impiegato da una moneta per raggiungere la massima altezza quando lanciata in verticale, rispettivamente sulla Terra e sulla Luna. La disuguaglianza tra i due tempi, quello sulla Terra e quello sulla Luna, viene in parte giustificata in termini della disuguaglianza tra i moduli delle accelerazioni di gravità

[36]«Mobile quoddam super planum horizontale proiectum mente concipio, omni secluso impedimento» (Galilei 1990, p. 249).

[37]Ricordiamo come viene formulato il principio di inerzia nel libro di testo: «(a) se la forza totale applicata a un punto materiale è uguale a zero, *allora* esso si muove a velocità costante; (b) se un punto materiale si muove a velocità costante, *allora* la forza totale che subisce è uguale a zero» (Amaldi 2007, p. 258).

rispettive. Queste ultime considerazioni vengono supportate dalla presenza di due grafici (corredati da didascalie) che riportano, nel moto di salita e di discesa della moneta sulla Terra, la posizione, su una retta orientata, e il tempo, in forma elencatoria.

Nel quadro teorico della razionalità di Morselli e Boero (2009) possiamo evidenziare una carenza a livello epistemico a partire dal titolo della sezione, in cui la direzione e il verso della velocità nel fenomeno racchiudono, semanticamente ed implicitamente nella perifrasi «verso l'alto», il fatto che tale sia la direzione e l'opposto del verso anche della forza-peso. In altre parole la distinzione nelle prime tre sezioni mantiene implicito il rapporto tra il vettore velocità e quello della forza-peso. Inoltre, solo in questa sezione si fa riferimento anche al verso del vettore velocità.

A livello comunicativo possiamo osservare un brusco cambio dei parametri coinvolti: infatti, rispetto alla didascalia dell'introduzione, in cui era coinvolto un ragazzo che lancia effettivamente una pallina e in cui il lettore svolge un ruolo di osservatore passivo, in questo caso il proiettile è una moneta (concettualmente il modello è analogo), il soggetto diventa un "noi" personale, di cui lo stesso lettore è chiamato a far parte attivamente, e l'azione proposta avviene in un piano intuitivo (si veda l'uso ipotetico della congiunzione «Quando»).

Sul piano della razionalità epistemica possiamo evidenziare un'altra mancanza nella frase «[d]opo [. . .] continua a salire per inerzia»: infatti, il richiamo al principio di inerzia comporta il fatto che la somma delle forze agenti sul corpo sia nulla, come viene quantificato a partire dalla legge I dei *Principia*. Tuttavia, la somma delle forze agenti sulla moneta dopo il lancio, anche trascurando le forze di attrito, è tutt'altro che nulla in quanto è presente la forza-peso. Questa carenza viene parzialmente colmata nella frase successiva che, a differenza della precedente, contiene l'ipotesi aggiuntiva «[s]e non ci fosse la forza-peso» e che sottintende, questa volta sì, «per inerzia.» Questa imprecisione viene amplificata dalla frase riquadrata e dalla presenza del box laterale, che in effetti dovrebbe essere propriamente parte del capitolo sul principio di inerzia. In particolare, nella frase evidenziata tale carenza si concretizza a livello comunicativo tramite l'uso della congiunzione avversativa «ma», che ostacola la piena interiorizzazione del fenomeno. A nostro avviso sarebbe stato più corretto da un punto di vista epistemico e comunicativo l'uso dell'espressione «se non fosse», che indica la compresenza nella frase di due modelli, uno che trascura la forza-peso e uno invece che la tiene in considerazione. In generale, la comunicazione e la giustificazione presenti all'interno del paragrafo sono condotte a livello puramente intuitivo e qualitativo, come testimonia ad esempio la presenza del verbo «rallentare» in luogo del più tecnico «decelerare.»

L'esperimento mentale che conclude la sezione confronta il tempo impiegato da una moneta per raggiungere la massima altezza sulla Luna, spingendo la capacità di immaginazione del lettore verso una situazione poco accessibile e concreta. A livello comunicativo viene presentata inizialmente la situazione qualitativa, «sulla Luna con la stessa velocità iniziale», da cui, in modo puramente euristico e intuitivo (per il lettore), si conclude che il tempo è maggiore. Inquadrando il passaggio nella funzione 2 della spiegazione, in quanto risposta ad una domanda "perché", possiamo evidenziare più carenze in questo ragionamento declinate sulle radici della razionalità, come presentate nel quadro di Morselli e Levenson (2014): innanzitutto a livello epistemico rimangono impliciti parte dei motivi e del ragionamento che giustificano il risultato. Al lettore si richiede l'autonomia di completare l'argomentazione, sapendo che il punto chiave è la disuguaglianza tra i moduli delle accelerazioni di gravità (che il lettore deve andare a cercare in fondo al libro).

Sul piano comunicativo rimane anche implicito nel testo e nei grafici (che si riferiscono solo al moto sulla Terra) che la «massima altezza» raggiunta dalla moneta in realtà sia diversa (maggiore) sulla Luna rispetto a quella sulla Terra. Inoltre, il parametro di confronto invariante nei due casi è una velocità, che a nostro parere rappresenta un ostacolo alla comprensione intuitiva richiesta, perché coinvolge intrinsecamente una derivata, ossia un tasso di variazione (dello spazio). Questo parametro infatti è facilmente controllabile a livello quantitativo, sul piano dei calcoli, dove le leggi orarie della moneta, che si possono ottenere "direttamente" (oppure integrando la seconda legge di Newton), risultano essere le seguenti:

$$s_L(t) = -\frac{1}{2}g_L t^2 + v_0 t$$

$$s_T(t) = -\frac{1}{2}g_T t^2 + v_0 t$$

dove abbiamo assunto un sistema di riferimento in cui l'origine coincide con il punto di partenza della moneta e il verso dell'asse delle ordinate è discorde rispetto a quello delle accelerazioni di gravità. Inoltre, si adottano quantitativamente i parametri $g_L = -1.6\,\mathrm{ms}^{-2}$, $g_T = -10\,\mathrm{ms}^{-2}$ (approssimazione suggerita in Amaldi (2007)), $v_0 = 4\,\mathrm{ms}^{-1}$ e partenza da fermo, ossia $s(t = 0) = 0$. Tuttavia, a livello qualitativo potrebbe essere più efficace considerare un invariante spaziale o temporale, forse più alla portata di una congettura di tipo elementare.

Riportiamo i grafici delle due leggi orarie a confronto nella figura 5.4[38], in cui possiamo osservare direttamente che l'invariante è la partenza da fermo $s(t = 0) = 0$ con velocità $v_0 = 4\,\mathrm{ms}^{-1}$ (le due parabole hanno in comune il coefficiente angolare della retta tangente nell'origine).

Infine, osserviamo come lo spazio-immagine sia distaccato dallo spazio testuale sotto il profilo della razionalità: più precisamente, non ci sono esplicite considerazioni sulle motivazioni di comodità per la scelta del sistema di riferimento (da cui le considerazioni quantitative dipendono), questo viene introdotto senza alcun preavviso nei grafici che supportano la discussione e

[38]Copyright © International GeoGebra Institute, 2013

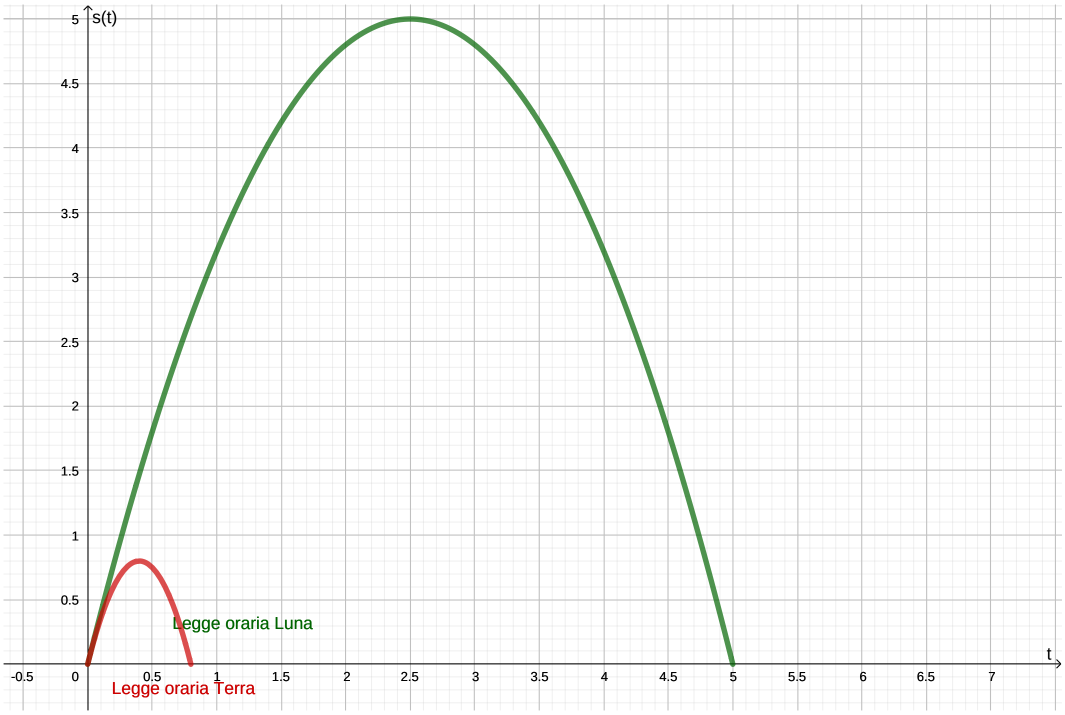


Figura 5.4: Grafici delle leggi orarie associate a una pallina lanciata verso l'alto sulla Terra e sulla Luna

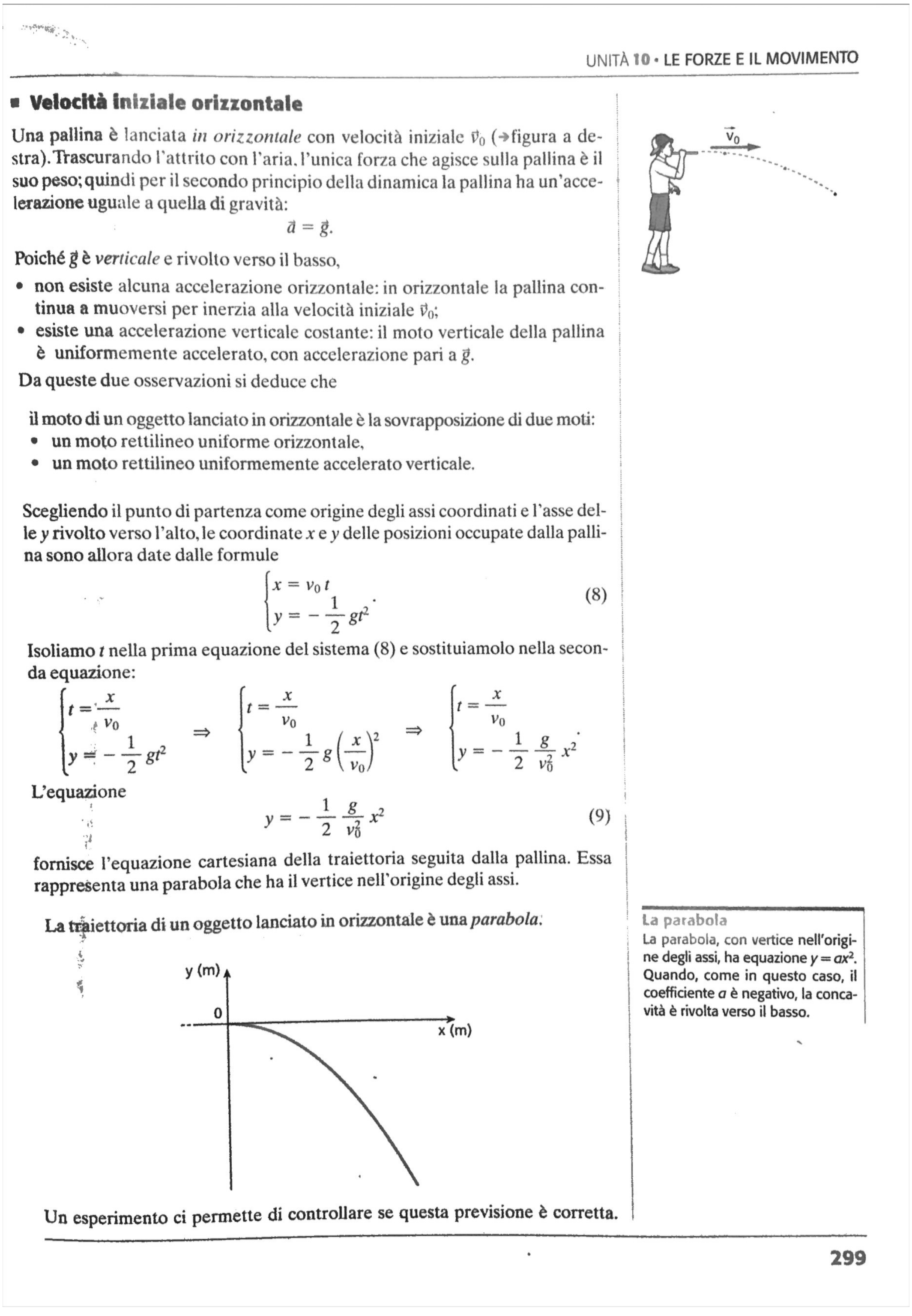
viene delegato al lettore il compito di decifrare le scelte e i calcoli impliciti per ricavare il valore del tempi. Inoltre, solo all'interno dello spazio riservato alla figura viene esplicitato un valore esemplificativo del modulo della velocità iniziale. Tutte queste considerazioni vanno a impoverire il livello comunicativo, che risulta carente nell'efficacia dell'esposizione.

5.4.3 «Velocità iniziale orizzontale»

Alla sezione analizzata precedentemente segue quella più corposa che tratta del caso in cui la velocità iniziale abbia direzione orizzontale (modello analogo a quello considerato da Galilei (1990)), riportata in figura 5.5.

Analogamente ai precedenti, questo paragrafo inizia *in medias res* con la presentazione di un esempio: il lancio di una pallina in orizzontale con velocità iniziale, che viene affiancato e supportato lateralmente da una figura che evidenzia la traiettoria della pallina (propriamente, un arco di parabola tratteggiato) e il vettore velocità iniziale.

La sezione si divide evidentemente in tre parti: nella prima parte sono presentate considerazioni qualitative che approfondiscono e preparano la descrizione analizzando i moti lungo le due componenti, orizzontale e verticale, in relazione alla seconda legge della dinamica di Newton. La seconda parte si concentra sulla derivazione dell'equazione della traiettoria tracciata dalla pallina, successivamente riconosciuta come una parabola con vertice



UNITÀ 10 • LE FORZE E IL MOVIMENTO

Velocità iniziale orizzontale

Una pallina è lanciata *in orizzontale* con velocità iniziale $\vec{v}_0$ (→figura a destra). Trascurando l'attrito con l'aria, l'unica forza che agisce sulla pallina è il suo peso; quindi per il secondo principio della dinamica la pallina ha un'accelerazione uguale a quella di gravità:

$$\vec{a} = \vec{g}.$$

Poiché $\vec{g}$ è *verticale* e rivolto verso il basso,

- non esiste alcuna accelerazione orizzontale: in orizzontale la pallina continua a muoversi per inerzia alla velocità iniziale $\vec{v}_0$;
- esiste una accelerazione verticale costante: il moto verticale della pallina è uniformemente accelerato, con accelerazione pari a $\vec{g}$.

Da queste due osservazioni si deduce che

il moto di un oggetto lanciato in orizzontale è la sovrapposizione di due moti:
- un moto rettilineo uniforme orizzontale,
- un moto rettilineo uniformemente accelerato verticale.

Scegliendo il punto di partenza come origine degli assi coordinati e l'asse delle y rivolto verso l'alto, le coordinate x e y delle posizioni occupate dalla pallina sono allora date dalle formule

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad (8)$$

Isoliamo t nella prima equazione del sistema (8) e sostituiamolo nella seconda equazione:

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0} \\ y = -\dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0} \\ y = -\dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{x}{v_0}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0} \\ y = -\dfrac{1}{2} \dfrac{g}{v_0^2} x^2 \end{cases}$$

L'equazione

$$y = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} x^2 \qquad (9)$$

fornisce l'equazione cartesiana della traiettoria seguita dalla pallina. Essa rappresenta una parabola che ha il vertice nell'origine degli assi.

La traiettoria di un oggetto lanciato in orizzontale è una *parabola*.

y (m)
0
x (m)

Un esperimento ci permette di controllare se questa previsione è corretta.

La parabola
La parabola, con vertice nell'origine degli assi, ha equazione $y = ax^2$. Quando, come in questo caso, il coefficiente a è negativo, la concavità è rivolta verso il basso.

299

Figura 5.5: Amaldi (2007, p. 299)

nell'origine, tramite la risoluzione di un sistema per eliminazione della variabile tempo. A differenza dell'ultima parte, queste due parti sono presentate usando soggetti esterni al lettore, che tendono a rendere autoritario ed impersonale il discorso, coerentemente con alcuni standard dimostrativi condivisi. Si conclude presentando un "esperimento", il lancio di due palline da golf con due diverse direzioni, che esplicitamente «permette di controllare se questa previsione è corretta» analizzando tramite tre fotografie a esposizione multipla la posizione delle palline a istanti successivi.

Analizziamo più nel dettaglio il contenuto della prima parte, in cui si presenta la scomposizione dei moti nelle componenti orizzontale e verticale, cercando di evidenziare la catena logico-deduttiva presentata dal testo. Dall'osservazione che, a meno della forza di attrito, sulla pallina agisca solo la forza-peso si conclude che l'accelerazione (totale) della pallina è pari a $\vec{g}$, usando il secondo principio della dinamica come già osservato nel capitolo 10.1, intitolato «La caduta libera.» Siccome l'accelerazione $\vec{g}$ è diretta verticalmente (il verso di $\vec{g}$, evidenziato nel testo originale, è in effetti irrilevante allo scopo), lo stesso vale per l'accelerazione totale e, di conseguenza, la componente orizzontale dell'accelerazione totale è nulla. Per il principio di inerzia, visto che non ci sono forze che agiscono nella direzione orizzontale, in altri termini la risultante orizzontale delle forze è nulla, ciò significa che in orizzontale il moto è rettilineo uniforme. Inoltre, siccome verticalmente è presente un'accelerazione costante, il moto verticale risulta uniformemente accelerato con accelerazione $\vec{g}$. «Si deduce» che il moto della pallina è sovrapposizione di due moti, uno verticale uniformemente accelerato ed uno orizzontale rettilineo uniforme.

Inquadrando nelle radici della razionalità di Morselli e Boero (2009), a livello teleologico l'obiettivo della prima parte è enfatizzare (e in effetti derivare) il fatto che il moto della pallina sia «la sovrapposizione di due moti.» Questo obiettivo, esplicito solo nel box riquadrato, viene sviluppato a livello comunicativo con l'utilizzo dello stile corsivo, che evidenzia nella discussione le componenti *in orizzontale* e *verticale*, e con un doppio uso di un elenco puntato a due voci. Completano l'autorità dell'argomentazione anche aspetti epistemici come il riferimento ai primi due principi della dinamica e la direzione dell'accelerazione. Tuttavia, possiamo osservare due mancanze a livello epistemico, che riteniamo degne di attenzione: l'apparenza della "deduzione" della scomposizione dei due moti, che si evince dalla circolarità dell'argomentazione usata, e l'uso "direzionale" (inedito sia nel libro di Amaldi (2007) sia nell'originale di Newton (1972)) del primo principio della dinamica, non si esplicita infatti che il primo principio della dinamica, enunciato a livello vettoriale, sia valido anche lungo le componenti. Riguardo al primo aspetto è interessante considerare quanto invece propone il testo di Galilei (1990): in Galileo infatti, come ricordato anche in Gombi (2020) e in Branchetti, Bagaglini et al. (2021), sono fin da subito esplicitate le assunzioni fisiche che inquadrano il fenomeno: la possibilità di combinare i moti orizzontale e verticale e la loro indipendenza. Quest'ultima non viene neppure menzionata nell'esposizione di Amaldi (2007).

Nel quadro teorico della spiegazione di Levenson, Barkai e Larsson (2013) possiamo evidenziare un aspetto pseudo-argomentativo, quindi riferibile alla funzione 2, in quanto il testo vuole dedurre (seppur con un'argomentazione circolare) la sovrapposizione dei moti.

A questo punto il testo bruscamente introduce un sistema di riferimento cartesiano e associa ad ogni componente del moto la rispettiva equazione, già studiata nei capitoli precedenti[39]. Questo cambiamento viene inserito a livello comunicativo con l'uso del gerundio «scegliendo», che nasconde implicitamente un periodo ipotetico "se scegliamo." Ne deriva quindi una possibile carenza a livello epistemico, in quanto non è esplicito che la scelta di un riferimento siffatto sia un'ipotesi aggiunta dall'autore in relazione all'obiettivo. Inoltre, le ipotesi aggiuntive sulla scelta di un particolare riferimento (in cui l'origine coincide con il punto di partenza e l'asse delle ordinate è orientato verso l'alto), oltre a sottintendere l'orientamento scelto per l'asse delle ascisse (carenza a livello epistemico), non si giustificano esplicitamente rispetto allo scopo, che presumiamo essere ottenere un'equazione "semplice" per la traiettoria, e quindi evidenziano una carenza a livello teleologico.

In generale, in questa seconda parte i contenuti vengono presentati in modo diluito e destrutturato, capovolgendo la forma usualmente condivisa dalla comunità matematica avanzata, e presente nella struttura di Galilei (1990) e di Newton (1972), di "enunciato-dimostrazione": infatti, l'enunciato viene posticipato rispetto alla sua dimostrazione (venendosi a trovare in fondo alla seconda parte). Dimostrazione che potremmo inquadrare nella divisione di Rav (1999), come citata in Hanna e Barbeau (2008), come dimostrazione formale, piuttosto che concettuale, in quanto procede per sostituzione-eliminazione della variabile t, evitando di considerare il significato intrinseco degli oggetti coinvolti e discostandosi dalla dimostrazione geometrica, e quindi più affine a quella "concettuale" in Rav (1999), presente in Galilei (1990). Questa scelta stilistica di capovolgimento temporale, che potrebbe essere giustificabile nell'obiettivo trasversale di presentare i contenuti in una dimensione esplorativa e dinamica, pur essendo localmente efficace, si concretizza globalmente in un'esposizione che rischia di amplificare la visione semplicistica della Matematica unicamente come strumento applicato alla Fisica. Inoltre, come si ricorda in Branchetti, Bagaglini et al. (2021, p. 11), «l'ingresso del paradigma cartesiano influenza [...] la trasposizione didattica d[i questa] dimostrazione» comportando uno squilibrio in favore del paradigma strumentale. A sostegno di questa considerazione possiamo osservare che, a differenza della sezione precedente, in questa emergono

[39]Nel capitolo 3.9, intitolato «Calcolo della posizione e del tempo nel moto uniforme», viene introdotta la legge oraria del moto rettilineo uniforme, mentre nel capitolo 4.7, intitolato «La posizione nel moto uniformemente accelerato», si presenta la legge oraria, appunto, del moto uniformemente accelerato. Questi richiami rimangono nell'esposizione di Amaldi (2007) impliciti e non ci sono riferimenti all'inizio dell'unità e del capitolo ai prerequisiti necessari.

improvvisamente formule, probabilmente per avere strumenti quantitativi per risolvere esercizi standardizzati.

L'obiettivo della formalizzazione matematica del paragrafo, e in effetti del capitolo, rimane quindi implicito (forse perché dato per scontato) e di conseguenza l'aspetto teleologico risulta in generale carente.

A livello epistemico inoltre, nella frase riquadrata «la traiettoria di un oggetto lanciato in orizzontale è una *parabola*», si evidenzia una duplice carenza: propriamente infatti la traiettoria di un proiettile è un "arco di parabola"[40], identificato erroneamente nel testo con la parabola stessa, con asse parallelo all'asse delle ordinate (in effetti, per le scelte effettuale, coincidente). In questo l'enunciato di Galilei (1990) risulta più preciso, in quanto si legge: «un proietto [...] descrive nel suo spostamento una linea semiparabolica[41].»

Per di più, il particolare della posizione dell'asse rimane implicito (anche nel box di approfondimento «La parabola») pur essendoci ambiguità: infatti, è consuetudine nella didattica liceale della Matematica associare allo studio della parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate almeno anche quella con asse parallelo all'asse delle ascisse.

La sezione si conclude con un esperimento che «ci permette di controllare se questa previsione è corretta», e alla fine si aggiunge «sperimentalmente»: l'esperimento viene introdotto da una didascalia descrittiva seguita da tre immagini corredate da annotazioni. Anche in questo caso viene introdotto un sistema di riferimento cartesiano; questa volta però l'origine non si trova nel punto di partenza delle palline, ma a livello del terreno. Questa implicita scelta si lega ad una carenza nella dimensione comunicativa di Morselli e Boero (2009) in quanto ostacola la comprensione da parte del lettore: è un'ipotesi non esplicitata, che quindi manifesta anche una lacuna epistemica, e per di più differisce dalla convenzione adottata nella dimostrazione precedente. Inoltre, nella radice comunicativa riscontriamo nuovamente una incongruenza di notazione: in due dei tre grafici, infatti, viene riportato un vettore libero senza etichetta che secondo noi nel primo caso rappresenta l'accelerazione di gravità, mentre nel secondo rappresenta la velocità orizzontale. A questa conclusione siamo arrivati considerando che lungo l'asse delle ascisse non sono presenti accelerazioni e lungo l'asse delle ordinate la velocità varia nel tempo, mentre presumiamo che i vettori indicati si riferiscano a quantità costanti. Questo uso del "vettore libero" si può evidenziare anche nel paragrafo «Velocità iniziale verso l'alto», dove nella seconda figura è presente un vettore libero che potrebbe identificare l'accelerazione di gravità.

Nel quadro della spiegazione di Levenson, Barkai e Larsson (2013) possiamo inserire quest'ultima parte della sezione all'interno della funzione 3 di interpretazione: secondo noi e secondo quanto si legge, infatti, l'esperimento in questo caso ha lo scopo di verificare e interpretare sperimentalmente la

[40] Ad essere precisi, il proiettile descrive un arco di ellisse in quanto le linee del campo gravitazionale non sono uniformi e parallele, come ci ha fatto ricordare la nostra Correlatrice.

[41] «*Proiectum [...] lineam semiparabolicam describit in sua latione*» (Galilei 1990, p. 250).

scomposizione dei moti nel caso di un lancio orizzontale. Tuttavia, non si evidenzia nuovamente come questa scomposizione sia un'ipotesi aggiunta e come la verifica renda solo conto di una plausibilità di questa assunzione.

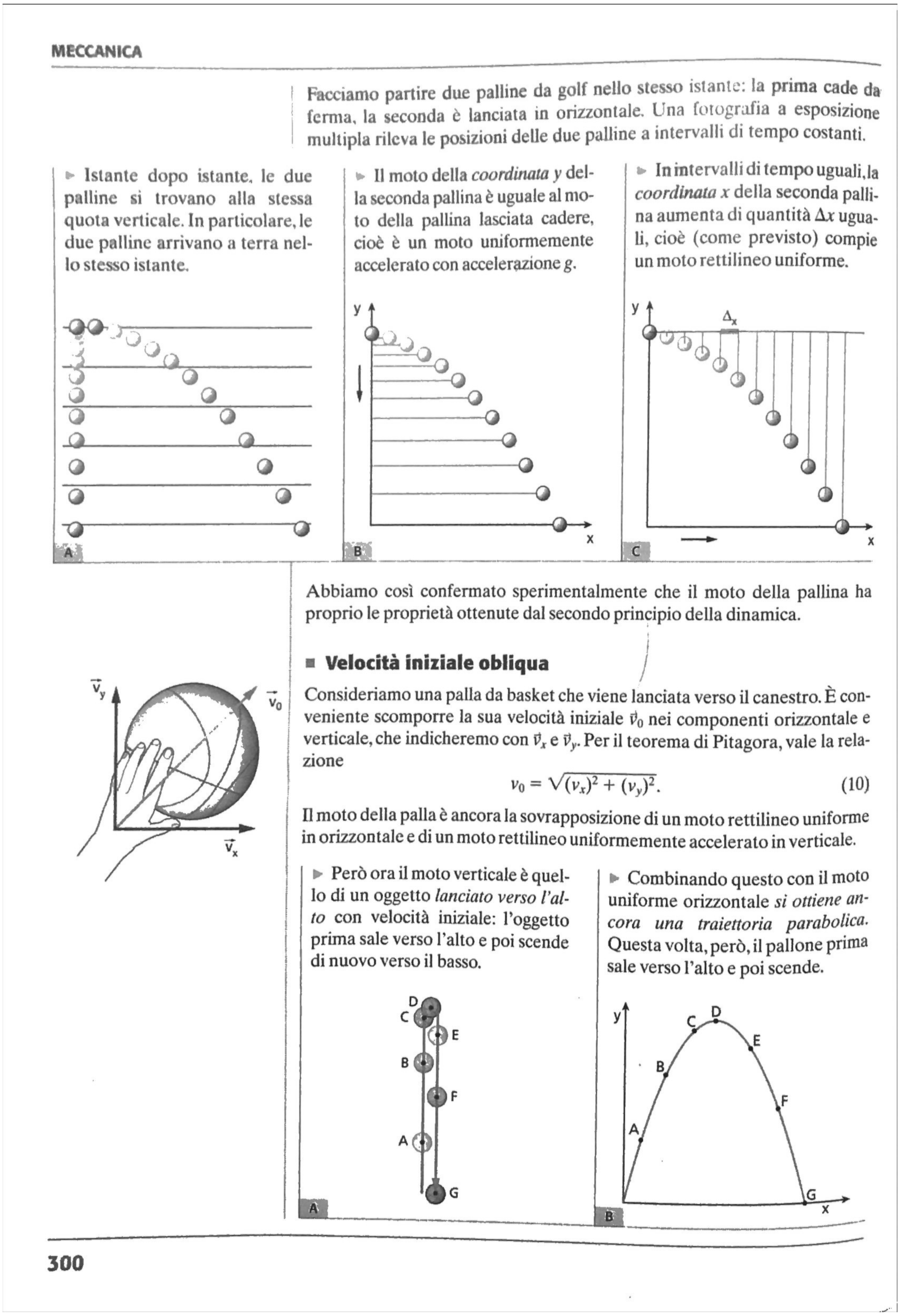
Osserviamo infine come la parola "esperimento[42]" abbia un'etimologia contro-intuitiva rispetto alla finalità di verifica sperimentale con cui è usata: infatti, il termine rimanda ad una funzione primaria di "mezzo di congettura", di tentativo. Potrebbe quindi essere uno strumento con cui accompagnare il lettore verso un'accettazione dell'ipotesi di scomposizione dei moti, piuttosto che una conferma posteriore, che il lettore rischia di interpretare come dimostrazione dell'ipotesi.

5.4.4 «Velocità iniziale obliqua»

Come si vede dalla figura 5.6, la penultima sottosezione del capitolo sul moto dei proiettili si apre con una breve frase che presenta il lancio di una palla da basket verso il canestro (presupponendo un lancio "non degenere"). Viene introdotta la scomposizione del vettore velocità nelle due componenti orizzontale e verticale, supportandola lateralmente con una figura che la rappresenta, e si osserva come sia ancora valida la sovrapposizione dei moti. La discussione prosegue con due grafici che descrivono il moto della palla prima nella componente verticale, successivamente questo viene combinato con il moto orizzontale. La sottosezione si chiude con l'enunciato evidenziato «la traiettoria di un oggetto lanciato in direzione obliqua è una parabola», di cui viene data l'equazione esplicita (vedi figura 5.7).

In riferimento al quadro teorico di Levenson, Barkai e Larsson (2013) possiamo evidenziare una presenza di funzione 1 della spiegazione, come nelle altre sottosezioni, a livello elementare. Inoltre, questa parte nello specifico ha evidente obiettivo di generalizzazione al caso in cui la direzione della velocità sia arbitraria. A nostro avviso, questa generalizzazione non viene debitamente sottolineata ma rimane circoscritta ed implicita, dando solo l'effetto di "uno dei tre possibili casi" in cui ci si può trovare. Non ci sono infatti riferimenti al fatto che le precedenti discussioni siano riconducibili a questo caso considerando nulla la opportuna componente della velocità, sebbene l'esplicito riferimento al teorema di Pitagora e le analogie evidenziate («stesse convenzioni» e «calcolo simile») potrebbero costituirne un "ponte di collegamento." Questi richiami costituiscono secondo noi una presenza della dimensione della razionalità epistemica di Morselli e Boero (2009) che però rimane appunto slegata dalla radice teleologica (l'obiettivo di generalizzazione tramite lo strumento dell'analogia). Senza questa connessione anche il livello comunicativo rimane sospeso, come si può evincere dalla frase «[è] conveniente scomporre la sua velocità iniziale $\vec{v}_0$ nei componenti orizzontale e verticale» che irrompe dopo la breve descrizione, e che può generare perplessità nel lettore.

[42]Si apprende dalla voce «[e]sperimento» nel sito etimo.it



MECCANICA

Facciamo partire due palline da golf nello stesso istante: la prima cade da ferma, la seconda è lanciata in orizzontale. Una fotografia a esposizione multipla rileva le posizioni delle due palline a intervalli di tempo costanti.

▸ Istante dopo istante, le due palline si trovano alla stessa quota verticale. In particolare, le due palline arrivano a terra nello stesso istante.

▸ Il moto della *coordinata y* della seconda pallina è uguale al moto della pallina lasciata cadere, cioè è un moto uniformemente accelerato con accelerazione *g*.

▸ In intervalli di tempo uguali, la *coordinata x* della seconda pallina aumenta di quantità Δx uguali, cioè (come previsto) compie un moto rettilineo uniforme.

Abbiamo così confermato sperimentalmente che il moto della pallina ha proprio le proprietà ottenute dal secondo principio della dinamica.

Velocità iniziale obliqua

Consideriamo una palla da basket che viene lanciata verso il canestro. È conveniente scomporre la sua velocità iniziale $\vec{v}_0$ nei componenti orizzontale e verticale, che indicheremo con $\vec{v}_x$ e $\vec{v}_y$. Per il teorema di Pitagora, vale la relazione

$$v_0 = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}. \qquad (10)$$

Il moto della palla è ancora la sovrapposizione di un moto rettilineo uniforme in orizzontale e di un moto rettilineo uniformemente accelerato in verticale.

▸ Però ora il moto verticale è quello di un oggetto *lanciato verso l'alto* con velocità iniziale: l'oggetto prima sale verso l'alto e poi scende di nuovo verso il basso.

▸ Combinando questo con il moto uniforme orizzontale *si ottiene ancora una traiettoria parabolica*. Questa volta, però, il pallone prima sale verso l'alto e poi scende.

300

Figura 5.6: Amaldi (2007, p. 300)

Sul piano comunicativo, in riferimento alla figura A abbiamo osservato come la separazione *temporale* venga resa in modo *spaziale* (usando due segmenti paralleli): a differenza delle figure relative al paragrafo «Velocità iniziale verso l'alto», infatti, qui la divisione del moto della palla da basket nelle due fasi (salita e discesa) non avviene in modo netto, ma sovrapposto in un'unica immagine. L'immagine usata potrebbe suggerire al lettore uno spostamento orizzontale rispetto al punto di lancio, assente nella modellizzazione ideale del lancio verticale.

5.4.5 «La gittata» e «L'effetto dell'aria»

Il capitolo sul moto dei proiettili si conclude con due sottosezioni, come si può vedere in figura 5.7: la prima riguarda la definizione della «gittata» e alcune considerazioni puramente qualitative (l'aspetto quantitativo è delegato alla rubrica matematica «La gittata massima») mentre la seconda tratta molto brevemente dell'aspetto di modellizzazione dell'attrito dell'aria.

Possiamo osservare che nella definizione si considerano alcune limitazioni, prima fra queste l'ipotesi che la direzione di lancio sia obliqua[43]. Limitazione ancora più rischiosa, in quanto implicita e quindi ascrivibile ad una carenza a livello di razionalità epistemica nel quadro di Morselli e Boero (2009), è il fatto che si assuma la stessa quota tra il «punto di partenza» e il «punto in cui esso torna al suolo.» Infatti, nel caso in cui questa coincidenza non sia verificata, si ha una definizione contro-intuitiva della gittata, che porterebbe ad identificarla con l'ipotenusa, e non un cateto, del triangolo rettangolo formato dal punto di partenza, dal punto di arrivo e dalla proiezione del punto di partenza sull'asse orizzontale.

La figura presentata e la frase che la descrive danno un'impressione dinamica che dovrebbe avere come obiettivo la migliore comprensione della situazione da parte del lettore, denotando quindi un aspetto di razionalità comunicativa. Tuttavia, la frase si pone in modo innaturale come ostacolo alla dinamicità e alla fluidità dell'immagine usando la congiunzione avversativa *ma poi*, che, a nostro parere, risulta poco elegante nel complesso.

Il paragrafo si conclude presentando un aspetto quantitativo, l'angolo corrispondente alla gittata massima, che si inserisce nella discussione in modo autoritario, senza riferimenti alla pagina di dimostrazione matematica seguente.

L'ultima sezione è dedicata all'aspetto di modellizzazione dell'attrito dell'aria. La frase che apre questa breve discussione, ha soggetto impersonale e quindi viene percepita dal lettore in modo autoritario, ostacolando l'aspetto comunicativo.

A nostro avviso, inoltre, manca una giustificazione (sia qualitativa sia quantitativa) del motivo per cui la traiettoria in presenza di attrito cambi. A questo proposito vengono presentati solo due esempi che si limitano a

[43]Forse questo termine escluderebbe il caso di lancio orizzontale e di lancio verticale.

UNITÀ 10 • LE FORZE E IL MOVIMENTO

Quindi, trascurando l'attrito dell'aria, possiamo affermare che

la traiettoria di un oggetto lanciato in direzione obliqua è una parabola.

Con le stesse convenzioni di prima, e con un calcolo simile al precedente, si dimostra che l'equazione di questa parabola è

$$y = \frac{v_y}{v_x}\,x - \frac{1}{2}\,\frac{g}{v_x^2}\,x^2. \qquad (11)$$

■ La gittata

Si chiama **gittata** la distanza che separa il punto di partenza di un corpo lanciato in direzione obliqua dal punto in cui esso torna al suolo.

Nella → figura sotto sono disegnate diverse traiettorie per oggetti lanciati con velocità che hanno lo stesso valore, ma inclinazioni diverse.

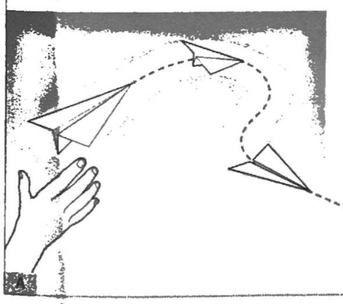
Si vede che quando l'angolo cresce la gittata aumenta, ma poi essa giunge a un valore massimo e quindi diminuisce quando l'angolo di lancio aumenta ancora.

Se l'attrito con l'aria è trascurabile, la gittata massima si ha quando la velocità iniziale del corpo lanciato è inclinata di 45° rispetto al terreno.

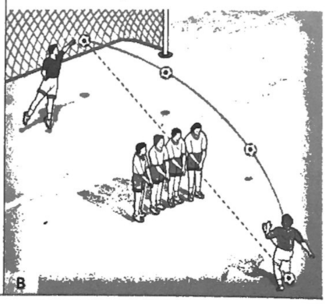
■ L'effetto dell'aria

Se l'attrito che l'aria esercita sull'oggetto in movimento (per esempio il pallone) non è trascurabile, la traiettoria che esso segue può essere molto diversa da una parabola.

► Un esempio ben noto è dato dalla strana traiettoria seguita da un aeroplanino di carta.



► In molti sport, gli effetti dovuti all'attrito sono sfruttati per ottenere risultati spettacolari.



301

Figura 5.7: Amaldi (2007, p. 301)

osservare questo cambiamento nella realtà (il moto di un aeroplanino e il moto del pallone calciato "a cucchiaio") e a supportare l'accettazione da parte del lettore, piuttosto che a favorirne la comprensione e l'interpretazione in termini fisici. Questo paragrafo di "curiosità" ci sembra perdere un'occasione utile per discutere di aspetti di modellizzazione e delle ipotesi che vengono fatte: per esempio la non uniformità del campo gravitazionale (da cui si deriva una traiettoria parabolica e non ellittica), l'approssimazione del proiettile a punto materiale che trascura gli effetti di rotazione (necessari ad esempio per l'effetto "a cucchiaio") e le dimensioni del corpo (di cui tiene conto la forza di attrito dell'aria).

Nel quadro della spiegazione di Levenson, Barkai e Larsson (2013), il risultato ottenuto è quindi una funzione 1 che si esaurisce a livello elementare, senza spingersi verso un'analisi dei limiti di validità e delle approssimazioni. Gli esempi si riducono a mezzi con funzione puramente persuasiva.

Capitolo 6

Discussione e conclusioni

La presente tesi si proponeva di analizzare alcuni testi selezionati per poter stabilire se i contenuti erano presentati seguendo il comportamento razionale, presentato inizialmente da Habermas (2001) e sviluppato come strumento di analisi da Morselli e Boero (2009), e utilizzando adeguate forme di spiegazione, il cui riferimento teorico è il modello di Levenson, Barkai e Larsson (2013), coerenti con i propositi degli autori. Il nostro scopo era inserirci nel filone di ricerca in particolare del progetto europeo IDENTITIES sul tema dell'interdisciplinarità tra Matematica e Fisica: un aspetto attuale della società contemporanea che però si distacca dalla visione disciplinare focalizzata e fossilizzata presente nella didattica odierna, per poter contribuire attivamente alla consapevolezza degli insegnanti nell'utilizzo dei libri di testo e delle fonti storiche come riferimento e materiale didattico.

I risultati che abbiamo presentato nel capitolo 5 confermano il grande distacco tra i testi storici e i manuali scolastici disciplinari, anche sul piano delle lenti teoriche della razionalità e della spiegazione da noi considerate e ancora inedite tra gli strumenti analitici del progetto IDENTITIES. Di seguito presentiamo un riassunto dei risultati principali ottenuti.

Siamo inizialmente partiti dalle Indicazioni Nazionali del Ministero dell'Istruzione relative ai licei scientifici, illustrative per «l'acquisizione delle conoscenze e dei metodi propri della matematica, della fisica e delle scienze naturali [...] per individuare le interazioni tra le diverse forme del sapere.»[1] Al loro interno abbiamo cercato eventuali riferimenti normativi a sostegno della nostra analisi; da questi documenti è emerso che la dimensione della razionalità è solo accennata come traguardo conclusivo del percorso liceale e che la radice comunicativa della razionalità è predominante. Dalla ricerca di richiami alle funzioni della spiegazione sono emersi due fronti: una direzione oggettiva, che ingloba la funzione 1 e la funzione 2, e una direzione soggettiva, che si allinea con la funzione 3. Le due linee si intrecciano nella funzione 4, che porta a generalizzazione e a formulazione di nuove ipotesi. Viene promossa una visione interdisciplinare strutturale e integra-

[1] Si veda DPR 15 marzo 2010, n.87-89 p. 93

tiva della Matematica in Fisica, anche se alcuni passi analizzati potrebbero essere fraintesi e asserviti a rafforzare l'ottica procedurale, da cui la ricerca contemporanea prende le distanze. Mancano ancora indicazioni più precise e materiale didattico interdisciplinare da usare in classe: nei documenti si delega alla professionalità degli insegnanti. Visto che la visione interdisciplinare si dimostra essere fondamentale per fronteggiare le sfide proposte da una società in rapido sviluppo il progetto IDENTITIES si propone anche di sviluppare attività formative per gli insegnanti e per gli studenti stessi.

Nella lettura della Indicazioni ci siamo resi conto che gli strumenti teorici, in origine disciplinari, nati in contesto propriamente matematico, devono essere parzialmente rinegoziati in ottica interdisciplinare: più precisamente, nei documenti normativi abbiamo riferito la funzione 1 della spiegazione alla descrizione non più di una procedura di soluzione matematica, ma di un fenomeno fisico osservato, modificando "spiega che cosa hai fatto" in "spiega che cosa hai osservato." Le Indicazioni suggeriscono anche una modifica della funzione 3 della spiegazione verso un'interpretazione in contesto fisico, ossia con le grandezze e con le teorie fisiche note. In questo cambiamento leggiamo un'"inversione di direzione": mentre la funzione 3 "matematica" si ascrive a un'interpretazione dal contesto matematico al contesto quotidiano, in Fisica la funzione interpretativa richiede l'elaborazione complementare, dal contesto quotidiano, o meglio empirico-fenomenologico, al contesto teorico.

Proseguendo nella lettura dei testi, abbiamo analizzato le fonti storiche di Galilei e di Newton, che si rendono fondamentali non solo per la loro portata storico-epistemologica, ma anche per la dimensione profondamente consapevole che manifestano nel comportamento razionale e nell'uso della spiegazione. Nel nostro studio, infatti, si osservano aspetti espliciti riferibili alla presenza di razionalità, soprattutto comunicativa, e di spiegazione, principalmente dimostrativa per la natura dei trattati considerati. Non mancano anche riferimenti che giustifichino il ragionamento e le strategie adottate e che interpretino sia in linguaggio matematico i fenomeni naturali sia, con riferimento al testo di Newton, in ambito quotidiano le definizioni fisiche. Inoltre, gli autori sono coscienti della funzione strutturale della Matematica, che in questo caso viene «coltivata» accuratamente come "sintetizzatrice formale." Importante ruolo viene dato, in particolare da Newton, all'esperimento che assume funzione validatrice, o di disconferma, delle congetture ipotizzate. I risultati da noi ottenuti si allineano con le analisi condotte da Gombi (2020) e da Branchetti, Bagaglini et al. (2021).

La nostra ricerca approda infine sul libro di testo di Amaldi per studiare le occorrenze delle lenti teoriche: la trattazione dell'Amaldi (2007) riguardo al moto parabolico parte improvvisamente dalla breve presentazione di tre situazioni, concentrandosi sulla durata dell'impulso iniziale; questi fenomeni preannunciano la tripartizione del capitolo nei paragrafi a seconda della direzione della velocità. Tutte le sezioni si aprono con una breve descrizione di una situazione realistica. Nel caso di lancio verticale ci si concentra sulla descrizione qualitativa di un esempio concettualmente analogo a quello iniziale, ma poco accessibile all'esperienza dello studente. Il caso della velocità iniziale orizzontale è maggiormente sviluppato, con una parte sulla «deduzione» (circolare) della scomposizione dei moti nelle componenti verticale e orizzontale, a cui segue una dimostrazione autoritaria per eliminazione della variabile tempo che si conclude con una conferma sperimentale delle proprietà ottenute. Il paragrafo sulla velocità obliqua è sostanzialmente ridotto all'osservazione «con le stesse convenzioni di prima, e con un calcolo simile al precedente, si dimostra che l'equazione [...] è [...]»[2], priva di riflessioni sull'efficacia della modellizzazione e dell'analogia. Concludono la discussione sul moto dei proiettili due paragrafi di natura descrittiva sulla gittata (staccato dalla rubrica «Matematica» intitolata «La gittata massima», che si trova in Amaldi (2007, p. 303)) e sugli effetti dell'attrito dell'aria («la traiettoria [...] può essere molto diversa da una parabola»[3]).

La letteratura sviluppata all'interno del progetto IDENTITIES (si fa riferimento a Gombi (2020) e Branchetti, Bagaglini et al. (2021)) ha già evidenziato come ci sia in generale l'omissione di riferimenti all'inquadramento storico-epistemologico della problematica e alla sua trattazione fisico-matematica, e una carenza del ruolo strutturale della Matematica nello studio della Fisica, preoccupandosi anche di quanto nei manuali rimanesse implicito nel testo. Rispetto alle due impostazioni generali dei manuali, presentate in Branchetti, Bagaglini et al. (ibid.), possiamo osservare come il testo di Amaldi (2007) si distacchi dalla maggior parte dei manuali, risultando più affine alla presentazione del manuale universitario di Walker (2014): entrambi, con le dovute differenze e limitazioni, partono dall'osservazione fisica del fenomeno e successivamente si preoccupano di enunciarne il principio fisico.

In generale, i risultati ottenuti precedentemente all'interno del progetto IDENTITIES vengono nuovamente confermati dal nostro contributo specifico, che ha evidenziato nel testo scolastico di Amaldi (2007) la mancanza della dimensione di consapevolezza esplicita che supporta il ragionamento del lettore; più precisamente, a livello teleologico abbiamo riscontrato come non ci siano riferimenti alle scelte strategiche e agli obiettivi perseguiti. Questo collegamento mancato si ritrova sul piano comunicativo concretizzato in un'esposizione dal significato "sospeso" e spesso poco accessibile nella pienezza, che alterna momenti di coinvolgimento attivo del lettore a momenti più autoritari in cui il sapere viene trasmesso senza filtro riflessivo. Infine, anche il livello epistemico risulta incompleto, visto che soltanto alcune ipotesi vengono esplicitate[4] e, nel caso in cui lo siano, non solo possono essere irrilevanti alla descrizione del fenomeno, come ad esempio la durata dell'impulso iniziale, ma non vengono argomentate in modo approfondito,

[2] Amaldi 2007, p. 301

[3] ibid., p. 301

[4] Non ci sono riferimenti ad esempio all'indipendenza dei due moti, di cui è stato evidenziato il ruolo centrale nella discussione del moto da Gombi (2020) e da Branchetti, Bagaglini et al. (2021).

limitandosi ad osservazioni distaccate degli effetti, come nel caso dell'attrito dell'aria.

Riguardo alle funzioni della spiegazione, abbiamo evidenziato la presenza dominante della funzione descrittiva che pervade il testo e che si limita alla breve osservazione delle immagini, confermando la modifica interdisciplinare precedentemente proposta analizzando le Indicazioni Nazionali. Lo spazio lasciato alla riflessione e al commento, che tende ad avere una funzione di modellizzazione, ma rudimentale, è molto limitato e ha un'impostazione ibrida tra cinematica e dinamica, inserendo il riferimento alla forza iniziale. La funzione dimostrativa emerge prepotentemente in un solo passo con la brusca introduzione di una sovrastruttura matematica che rischia, secondo noi, come previsto dai lavori precedenti di Gombi (2020) e di Branchetti, Bagaglini et al. (2021), di presentare una visione algoritmico-procedurale della Matematica applicata alla Fisica. Il risultato è un'esposizione ricca di contenuti impliciti che ostacolano la spiegazione complessiva. A nostro avviso, oltre a irrobustire le funzioni argomentativa e interpretativa della spiegazione con radici più presenti della razionalità, è necessaria un'evoluzione della funzione descrittiva verso una funzione giustificativa delle strategie, come emerge dai testi storici, per poter consentire maggiore chiarezza e comprensione dei concetti in prospettiva interdisciplinare.

Riteniamo di aver contribuito al progetto IDENTITIES creando anche precedenti per future ricerche necessarie: potrebbe essere interessante innanzitutto affiancare alla lettura parziale delle Indicazioni Nazionali anche quella delle Linee Guida per gli istituti tecnici, indagando se ci sono differenze su come sviluppare la razionalità e la spiegazione per contribuire all'apprendimento dello statuto epistemico autentico delle discipline in ottica interdisciplinare.

Infine, l'utilizzo delle lenti teoriche, inedite nel progetto IDENTITIES, ci ha suggerito una prima modifica in prospettiva interdisciplinare di tali strumenti che necessita ancora di struttura e di approfondimento. A questo proposito potrebbe essere interessante studiare come gli studenti stessi percepiscono l'esposizione del libro di testo e come modificano le loro credenze in base alla lettura dei manuali, oltre ad effettuare un'analisi approfondita di altri libri di testo o di loro riedizioni più recenti (il manuale di Amaldi risale al 2007).

Appendice A

Originali dei testi storici

In questa appendice riportiamo i testi originali a cui facciamo riferimento nella tesi e che sono stati oggetto della nostra attenzione e della nostra analisi. Nella prima sezione riportiamo gli estratti dai testi storici di Galileo, tratti dalla «Giornata Terza» in Galilei (1990), e di Newton, tratti dai Newton (1972).

Riteniamo di aver arricchito i fronti possibili di analisi, e di aver preso maggiore consapevolezza del lessico, della struttura e dei concetti avendo affrontato i testi in originale e avendone curato una traduzione il più possibile fedele alla luce che i brani vogliono offrire.

A.1 Dalla «Giornata Terza»

> GIORNATA TERZA
>
> *DE MOTU LOCALI*
>
> *De subiecto vetustissimo novissimam promovemus scientiam. MOTU nil forte antiquius in natura, et circa eum volumina nec pauca nec parva a philosophis conscripta reperiuntur; symptomatum tamen, quæ complura et scitu digna insunt in eo, adhuc inobservata, necdum indemonstrata, comperio. Leviora quædam adnotantur, ut, gratia exempli, naturalem motum gravium descendentium continue accelerari; verum, iuxta quam proportionem eius fiat acceleratio, proditum hucusque non est: nullus enim, quod sciam, demonstravit, spatia a mobili descendente ex quiete peracta in temporibus æqualibus, eam inter se retinere rationem, quam habent numeri impares ab unitate consequentes. Observatum est, missilia, seu proiecta, lineam qualitercunque curvam designare; veruntamen, eam esse parabolam, nemo prodidit. Hæc ita esse, et alia non pauca nec minus scitu digna, a me demonstrabuntur, et, quod pluris faciendum censeo, aditus et accessus ad amplissimam præstantissimamque scientiam, cuius hi nostri labores erunt elementa, recludetur, in qua ingenia meo perspicaciora abditiores recessus penetrabunt.*
>
> *Tripartito dividimus hanc tractationem: in prima parte consideramus ea quæ spectant ad motum æquabilem, seu uniformem; in secunda de motu naturaliter accelerato scribimus; in tertia, de motu violento, seu de proiectis.*

De motu æquabili.

Circa motum æquabilem, seu uniformem, unica opus habemus definitione, quam eiusmodi profero:

DEFINITIO.

Æqualem, seu uniformem, motum intelligo eum, cuius partes quibuscunque temporibus æqualibus a mobili peractæ, sunt inter se æquales

ADMONITIO.

Visum est addere veteri definitioni (quæ simpliciter appellat motum æquabilem, dum temporibus æqualibus æqualia transiguntur spatia) particulam *quibuscunque*, hoc est omnibus temporibus æqualibus: fieri enim potest, ut temporibus aliquibus æqualibus mobile pertranseat spatia æqualia, dum tamen spatia transacta in partibus eorundem temporum minoribus, licet æqualibus, æqualia non sint. Ex allata definitione quatuor pendent axiomata, scilicet:

AXIOMA I.

Spatium transactum tempore longiori in eodem motu æquabili maius esse spatio transacto tempore breviori.

AXIOMA II.

Tempus quo maius spatium conficitur in eodem motu æquabili, longius est tempore quo conficitur spatium minus.

AXIOMA III.

Spatium a maiori velocitate confectum tempore eodem, maius est spatio confecto a minori velocitate.

AXIOMA IV.

Velocitas qua tempore eodem conficitur maius spatium, maior est velocitate, qua conficitur spatium minus.

THEOREMA I, PROPOSITIO I.

Si mobile æquabiliter latum eademque cum velocitate duo pertranseat spatia, tempora lationum erunt inter se ut spatia peracta.

Pertranseat enim mobile æquabiliter latum eadem cum velocitate duo spatia AB, BC, et sit tempus motus per AB, DE; tempus vero motus per BC esto EF: dico, ut spatium AB ad spatium BC, ita esse tempus DE ad tempus EF. Protrahantur utrinque spatia et tempora versus G, H et I, K, et in AG sumantur quotcunque spatia ipsi AB æqualia, et totidem tempora in DI, tempori DE similiter æqualia; et rursus in CH sumantur secundum quamcunque multitudinem spatia ipsi CB æqualia, et totidem tempora in FK, tempori EF æqualia: erunt iam spatium BG et tempus EI æque multiplicia spatii BA et temporis ED iuxta quamcunque multiplicationem accepta, et similiter spatium HB et tempus KE spatii CB temporisque EE æque multiplicia in qualibet multiplicatione. Et quia DE est tempus lationis per AB, erit totum EI tempus totius BG, cum motus ponatur æquabilis sintque in EI tot tempora ipsi DE æqualia quot sunt in BG spatia æqualia BA; et similiter concludetur, KE esse tempus lationis per HB. Cum autem motus ponatur æquabilis, si spatium GB esset æquale ipsi BH, tempus quoque IE tempori EK foret æquale; et si GB maius sit quam BH, etiam IE quam EK maius erit; et si minus, minus. Sunt itaque quatuor magnitudines, AB prima, BC secunda, DE tertia, EF quarta, et primæ et tertiæ, nempe spatii AB et temporis DE, sumpta sunt æque multiplicia iuxta quamcunque multiplicationem tempus IE et spatium GB; ac demonstratum est, hæc vel una æquari, vel una deficere, vel una excedere, tempus EK et spatium BH, æque multiplicia scilicet secundæ et quartæ: ergo prima ad secundam, nempe spatium AB ad spatium BC, eandem habet rationem quam tertia et quarta, nempe tempus DE ad tempus EF: quod erat demostrandum.

A.2 Dai «Principia mathematica»

AUCTORIS PRÆFATIO AD LECTOREM.

CUM veteres mechanicam *(uti auctor est Pappus) in rerum naturalium investigatione maximi fecerint; et recentiores, missis formis substantialibus et qualitatibus occultis, phænomena naturæ ad leges mathematicas revocare aggressi sint: Visum est in hoc tractatu* mathesin *excolere, quatenus ea ad* philosophiam *spectat.* Mechanicam *vero duplicem veteres constituerunt:* rationalem, *quæ per demonstrationes accurate procedit, et* practicam. *Ad practicam spectant artes omnes manuales, a quibus utique* mechanica *nomen mutuata est. Cum autem artifices parum accurate operari soleant, fit ut* mechanica *omnis a* geometria *ita distinguatur, ut quicquid accuratum sit ad* geometriam *referatur, quicquid minus accuratum ad* mechanicam. *Attamen errores non sunt artis, sed artificum. Qui minus accurate operatur, imperfectior est mechanicus, et si quis accuratissime operari posset, hic foret mechanicus omnium perfectissimus. Nam et linearum rectarum et circulorum descriptiones, in quibus* geometria *fundatur, ad* mechanicam *pertinent. Has lineas describere* geometria *non docet, sed postulat. Postulat enim ut tyro easdem accurate describere prius didiceret, quam limen attingat* geometriæ; *dein, quomodo per has operationes problemata solvantur, docet; rectas et circulos describere problemata sunt, sed non geometrica. Ex* mechanica *postulatur horum solutio, in* geometria *docetur solutorum usus. Ac gloriatur* geometria *quod tam paucis principiis aliunde petitis tam multa præstet. Fundatur igitur* geometria *in praxi mechanica, et nihil aliud est quam* mechanicæ universalis *pars illa, quæ artem mensurandi accurate proponit ac demonstrat. Cum autem artes manuales in corporibus movendis præcipue versentur, fit ut* geometria *ad magnitudinem,* mechanica *ad motum vulgo referatur. Quo sensu* mechanica rationalis *erit scientia motuum, qui ex viribus quibuscunque resultant, et virium quæ ad motus quoscunque requiruntur, accurate proposita ac demonstrata. Pars hæc* mechanicæ *a veteribus in* potentiis quinque *ad artes manuales spectantibus exculta fuit, qui gravitatem (cum potentia manualis non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentias illas movendis considerarunt. Nos autem non artibus sed philosophiæ consulentes, deque potentiis non manualibus sed naturalibus scribentes, ea maxime tractamus quæ ad gravitatem, levitatem, vim elasticam, resistentiam fluidorum et ejusmodi vires seu attractivas seu impulsivas spectant: Et ea propter, hæc nostra tanquam philosophiæ principia mathematica proponimus. Omnis enim philosophiæ difficultas in eo versari videtur, ut a phænomenis motuum* *investigemus vires naturæ, deinde ab his viribus demonstremus phænomena reliqua. Et huc spectant propositiones generales quas libro primo et secundo pertractavimus. In libro autem tertio exemplum hujus rei proposuimus per explicationem systematis mundani. Ibi enim, ex phænomenis cœlestibus, per propositiones in libris prioribus mathematice demonstratas, derivantur vires gravitatis, quibus corpora ad solem et planetas singulos tendunt. Deinde ex his viribus per propositiones etiam mathematicas, deducuntur motus planetarum, cometarum, lunæ et maris. Utinam cætera naturæ phænomena ex principiis mechanicis eodem argumentandi genere derivare liceret. Nam multa me movent, ut nonnihil suspicer ea omnia ex viribus quibusdam pendere posse, quibus corporum particulæ per causas nondum cognitas vel in se mutuo impelluntur et secundum figuras regulares cohærent, vel ab invicem fugantur et recedunt: quibus viribus ignotis, philosophi hactenus naturam frustra tentarunt. Spero autem quod vel huic philosophandi modo, vel veriori alicui, principia hic posita lucem aliquam præbebunt.*

[. . .]

Ut omnia candide legantur, et defectus in materia tam difficili non tam reprehendantur, quam novis lectorum conatibus investigentur, et benigne suppleantur, enixe rogo.

[. . .]

Philosopiæ Naturalis

PRINCIPIA MATHEMATICA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

Quantitas materiæ est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudinem conjiunctim.

AER densitate duplicata, in spatio etiam duplicato, fit quadruplus; in triplicato sextuplus. Idem intellige de nive et pulveribus per compressionem vel liquefactionem condensatis. Et par est ratio corporum omnium, quæ per causas quascunque diversimode condensantur. Medii interea, si quod fuerit, interstitia partium libere pervadentis, hic nullam rationem habeo. Hanc autem quantitatem sub nomine corporis vel massæ in sequentibus passim intelligo. Innotescit ea per corporis cujusque pondus: Nam ponderi proportionalem esse reperi per experimenta pendulorum accuratissime instituta, uti posthac docebitur.

DEFINITIO II.

Quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate materiæ conjunctim.

Motus totius est summa motuum in partibus singulis; ideoque in corpore duplo majore, æquali cum velocitate, duplus est, et dupla cum velocitate quadruplus.

DEFINITIO III.

Materiæ vis insita est potentia resistendi, qua corpus unumquodque, quantum in se est, perseverat in statu suo vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

DEFINITIO IV.

Vis impressa est actio in corpus exercita, ad mutandum ejus statum vel quiescendi vel movendi uniformiter in directum.

[...]

AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

LEX I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

PRojectilia perseverant in motibus suis, nisi quatenus a resistentia aëris retardantur, et vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohærendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari, nisi quatenus ab aëre retardatur. Majora autem planetarum et cometarum corpora motus suos et progressivos et circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

LEX. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet; dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul et semel, sive gradatim et successive impressa fuerit. Et hic motus (quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur) si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel obliquo oblique adjicitur, et cum eo secundum utriusque determinationem componitur.

LEX. III.

Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse æquales et in partes contrarias dirigi.

[...]

COROLLARIUM I.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere, quo latera separatis.

Si corpus dato tempore, vi sola M in loco A impressa, ferretur uniformi cum motu ad A ad B; et vi sola N, in eodem loco impressa, ferretur ab A ad C: compleatur parallelogrammum ABDC, et vi utraque feretur corpus illud eodem tempore in diagonali ab A ad D. Nam quoniam vis N agit secundum lineam AC ipsi BD parallelam, hæc vis per legem II nihil mutabit velocitatem accedendi ad lineam illam BD a vi altera genitam. Accedet igitur corpus eodem tempore ad lineam BD, sive vis N imprimatur, sive non; atque adeo in fine illius temporis reperietur alicubi in linea illa BD. Eodem argumento in fine temporis ejusdem reperietur alicubi in linea CD, et idcirco in utriusque lineæ concursu D reperiri necesse est. Perget autem motu rectilineo ad A ad D per legem I.

Bibliografia

Amaldi, U. (2007). *La fisica di Amaldi. Idee ed esperimenti*. (ed. anas. 2011). Vol. 1, Meccanica. Zanichelli.

Aristotele (2008). «Del Cielo». In: *Aristotele*. A cura di O. Longo. Vol. 1. I classici del pensiero. Milano: Arnoldo Mondadori Editore, pp. 297–421.

Bergia, S. (mar. 2006). «Il tempo degli astronomi e dei fisici al vaglio delle critiche dei filosofi». In: *Giornale di Astronomia*, pp. 27–32.

Bing, T. e E. Redish (lug. 2009). «Analyzing problem solving using Math in Physics: epistemological framing via warrants». In: *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* 5. DOI: `10.1103/PhysRevSTPER.5.020108`.

Blum, W. e R. Borromeo Ferri (2009). «Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?» In: *Journal of Mathematical Modelling and Application* 1, pp. 45–58.

Boero, P. (2006). «Habermas'theory of rationality as a comprehensive frame for conjecturing and proving in school». In: *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Prague, Czech Republic). A cura di J. Novotná et al. Vol. 2, pp. 185–192.

Boero, P., E. Guala e F. Morselli (2013). «Crossing the borders between mathematical domains: a contribution to frame the choice of suitable tasks in teacher education». In: *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Kiel, Germany). A cura di A. M. Lindmeier e A. Heinze. Vol. 2, pp. 97–104.

Boero, P. e F. Morselli (2009). «The use of algebraic language in mathematical modelling and proving in the perspective of Habermas'theory of rationality». In: *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Lyon, France). A cura di V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne e F. Arzarello, pp. 964–973.

Bowers, J. e H. Doerr (2001). «An Analysis of Prospective Teachers'Dual Roles in Understanding the Mathematics of Change: Eliciting Growth With Technology». In: *Journal of Mathematics Teacher Education* 4, pp. 115–137. DOI: `10.1023/A:1011488100551`.

Branchetti, L., V. Bagaglini et al. (2021). «Educazione linguistica trasversale e interdisciplinarità tra matematica e fisica: analisi e confronto tra testi storici e libri di testo per la scuola secondaria di secondo grado sul tema del moto parabolico». In: *Didattica della Matematica. Dalla ricerca alle pratiche in aula*. (in corso di revisione).

Branchetti, L., A. Cattabriga e O. Levrini (2019). «Interplay between mathematics and physics to catch the nature of a scientific breakthrough: The case of the blackbody». In: *Physical Review Special Topics - Physics Education Research* 15. DOI: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.15.020130.

Dreyfus, T. (1999). «Why Johnny can't prove». In: *Educational Studies in Mathematics* 38.1, pp. 85–109. DOI: 10.1023/A:1003660018579.

Euclide (2007). *Tutte le opere*. A cura di F. Acerbi. (ed. anas. 2014). Il pensiero occidentale. Testo greco a fronte. Bompiani.

Feynman, R. (1965). *The character of physical laws*. (ed. anast. 1985). Cambridge, Massachusetts: The MIT press.

Frodeman, R., J. T. Klein e R. C. S. Pacheco (2017). *The Oxford handbook of interdisciplinarity*. Oxford handbooks. Oxford University Press.

Galilei, G. (1964). «Il Saggiatore». In: *Opere*. A cura di F. Brunetti. Vol. 1. Classici della scienza. Torino: UTET, pp. 595–808.

— (1990). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed i movimenti locali*. A cura di E. Giusti. (ed. anast. 1998). Nuova raccolta di classici italiani annotati. Torino: Giulio Einaudi Editore.

Gingras, Y. (2001). «What did mathematics do to physics?» In: *History of Science* 39.4, pp. 383–416. DOI: 10.1177/007327530103900401.

— (gen. 2015). «The creative power of formal analogies in Physics: the case of Albert Einstein». In: *Science & Education* 24. DOI: 10.1007/s11191-014-9739-1.

Giusti, E. (1990). «Galilei e le leggi del moto». In: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed i movimenti locali*. A cura di E Giusti. Nuova raccolta di classici italiani annotati. (Autore: G. Galilei). Torino: Giulio Einaudi Editore, pp. IX–LX.

— (1993). *Euclides Reformatus. La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana*. Studi e testi di storia della matematica. Bollati Boringhieri.

Gombi, A. (2020). «The foundational case of the parabolic motion: design of an interdisciplinary activities for the IDENTITIES project». Tesi di Laurea Magistrale in Fisica. Alma Mater Studiorum - Università di Bologna.

Greca, I. e M. Moreira (gen. 2002). «Mental, physical, and mathematical models in the teaching and learning of Physics». In: *Science Education* 86, pp. 106–121. DOI: 10.1002/sce.10013.

Habermas, J. (2001). *Verità e giustificazione*. A cura di M. Carpitella. Biblioteca di cultura moderna. Editori Laterza.

Hanna, G. e E. Barbeau (2008). «Proofs as Bearers of Mathematical Knowledge». In: *ZDM* 40, pp. 345–353. DOI: 10.1007/s11858-008-0080-5.

Hudson, H.T. e W.R. McIntire (1977). «Correlation between mathematical skills and success in physics». In: *American Journal of Physics* 45.5, pp. 470–471. DOI: 10.1119/1.10823.

Karam, R. (2015). «Introduction of the Thematic Issue on the Interplay of Physics and Mathematics». In: *Science & Education* 24.5, pp. 487–494. DOI: 10.1007/s11191-015-9763-9.

Kline, M. (1981). *Mathematics and the physical world*. Dover Books on Mathematics. New York: Dover Publications.

Koyré, A. (1983). *Studi newtoniani*. A cura di P. Galluzzi. Vol. 140. Einaudi Paperbacks e Readers. Giulio Einaudi Editore.

Levenson, E. (2013). «Exploring one student's explanations at different ages: the case of Sharon». In: *Educational Studies in Mathematics* 83, pp. 181–203. DOI: 10.1007/s10649-012-9447-1.

Levenson, E. e R. Barkai (2013). «Exploring the functions of explanations in mathematical activities for children ages 3-8 year old: the case of the Israeli curriculum». In: *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Antalya, Türkiye). A cura di B. Ubuz, Ç. Haser e M. A. Mariotti, pp. 2158–2167.

Levenson, E., R. Barkai e K. Larsson (2013). «Functions of explanations : Israeli and swedish elementary school curriculum documents». In: *Proceedings of SEMT '13 - International Symposium Elementary Mathematics Teaching* (Prague, Czech Republic). A cura di J. Novotná e H. Moraová, pp. 188–195.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (2010). *Schema di regolamento recante «Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all'articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento.»* (Ultima consultazione: 24 marzo 2021). URL: https://www.gazzettaufficiale.it/eli/gu/2010/12/14/291/so/275/sg/pdf.

Morselli, F. e P. Boero (2009). «Habermas'construct of rational behaviour as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof». In: *Proceedings of the International Commission on Mathematical Instruction Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Taipei, Taiwan). A cura di M. Villiers et al. Vol. 2, pp. 100–105.

Morselli, F. e E. Levenson (2014). «Functions of explanations and dimensions of rationality: combining frameworks». In: *Proceedings of the Joint Meeting of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (Vancouver, Canada). A cura di P. Liljedahl et al. Vol. 4, pp. 249–256.

Newton, I. (1972). *Isaac Newton's Philosophiae naturalis Principia mathematica. The third edition (1726) with variant readings*. A cura di A. Koyré, I. B. Cohen e A. Whitman. Vol. 1. Harvard University Press.

Plutarco (2018). «L'arte di ascoltare». In: *Tutti i Moralia*. A cura di G. Pisani. Il pensiero occidentale. Testo greco a fronte. Bompiani, pp. 66–87.

Rav, Y. (1999). «Why Do We Prove Theorems?» In: *Philosophia Mathematica* 7.1, pp. 5–41. DOI: 10.1093/philmat/7.1.5.

Redish, E. (2006). «Problem solving and the use of math in physics courses». In: *ArXiv physics e-prints invited talk presented at the conference, world view on physics education in 2005: Focusing on change, Delhi, August 21–26, 2005. To be published in the proceedings, arXiv:physics/0608268*.

Schnädelbach, H. (1992). «Über Rationalität und Begründung». In: Suhrkamp.

Thurston, W. P. (1994). «On proof and progress in mathematics». In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 30. Primary 00A30, pp. 161–167. DOI: 10.1090/S0273-0979-1994-00502-6.

Tzanakis, C. (2016). «Mathematics & physics: an innermost relationship. Didactical implications for their teaching & learning». In: *History and Pedagogy of Mathematics* (Montpellier, France). (Ultima consultazione: 24 marzo 2021). URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01349231/file/108470.pdf.

Uhden, O. et al. (2011). «Modelling Mathematical Reasoning in Physics Education». In: *Science & Education* 21. DOI: 10.1007/s11191-011-9396-6.

UNESCO, International Bureau of Education (2017). *15 clues to support the Education 2030 Agenda*. (Ultima consultazione: 24 marzo 2021). URL: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000259069/PDF/259069eng.pdf.multi.

Viale, M. (2019). *I fondamenti linguistici delle discipline scientifiche. L'italiano per la matematica e le scienze a scuola*. Glottologia, linguistica, lingue e letterature straniere. CLEUP.

Walker, J. S. (2014). *Physics*. (ed. anast. 2017). London: Pearson.

Yackel, E. (2004). «Theoretical Perspectives for Analyzing Explanation, Justification and Argumentation in Mathematics Classrooms.» In: *Research in Mathematical Education* 8.

Zahar, E. G. (1980). «Einstein, Meyerson and the Role of Mathematics in Physical Discovery». In: *The British Journal for the Philosophy of Science* 31.1, pp. 1–43.

Elenco delle figure

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare innanzitutto la mia Relatrice professoressa Francesca Morselli che mi ha aiutato nella crescita della mia passione con consigli puntuali di forma e di contenuto, autorevoli ma sempre nel rispetto del mio pensiero, e con sostegno umano nei momenti di maggiore difficoltà. Ringrazio la mia Correlatrice professoressa Laura Branchetti per il seminario tenuto in Dipartimento che ha «acceso», come direbbe Plutarco, il mio interesse sulla tematica interdisciplinare facendomi conoscere il progetto IDENTITIES, i suoi collaboratori.

Mi impegnerò per fare tesoro della grande ricchezza che entrambe mi hanno dato con il loro interesse e professionalità.

Vorrei anche ringraziare la professoressa Paola Fantini che ha contribuito all'analisi di Galilei e di Amaldi con la sua esperienza da docente di scuola secondaria e collaboratrice del progetto, dedicandomi il suo tempo anche nella correzione della tesi.

Il mio ringraziamento più grande va alla mia famiglia, che mi è stata accanto durante questo periodo straordinario della mia vita e che continua a supportarmi nelle scelte e nei percorsi che intraprendo. Non sarei arrivato fino a questo punto senza il loro Amore.